PROGRAMME DE COLLE S28

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

▪▪▪ Produit scalaire

Définition : *Soit E un $\mathbf{R}$-e.v. On appelle **produit scalaire** sur E, toute application $\Phi : E^2 \to \mathbf{R}$ qui est :*

- *symétrique : pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E, $\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \Phi(\vec{y},\vec{x})$;*
- *bilinéaire : linéaire par rapport à chaque variable ;*
- *positive : pour tout $\vec{x}$ dans E, $\Phi(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$;*
- *définie-positive : pour tout $\vec{x}$ dans E, si $\Phi(\vec{x},\vec{x}) = 0$, alors $\vec{x} = 0_E$.*

Dans ce cas, on notera pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E : $\Phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{y})$.

Définition : *Un $\mathbf{R}$-e.v E muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ est dit **préhilbertien réel**. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un **espace vectoriel euclidien** (e.v.e).*

Définition : *Pour tout $\vec{x} \in E$, le réel $(\vec{x} \mid \vec{x})$ est positif. On note $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x} \mid \vec{x})}$ la **norme euclidienne** de $\vec{x}$.*

Proposition.— Identités remarquables —. Soit E préhilbertien réel. Pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E,

- $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \mid \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$
- $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$.

Théorème.— Soit E préhilbertien réel, $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$. Alors :

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** $|(\vec{x} \mid \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ avec égalité *ssi* $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.
- **Inégalité triangulaire** $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ avec égalité *ssi* $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires et de même sens.

▪▪▪ Familles orthogonales, orthonormales

Définition : *Soit E préhilbertien réel. Soit $\vec{x},\vec{y},\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$ des vecteurs de E. On dit que :*

- *$\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont **orthogonaux** si $(\vec{x} \mid \vec{y}) = 0$;*
- *la famille $(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p)$ est **orthogonale** si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (\vec{x}_i \mid \vec{x}_j) = 0$;*
- *la famille $(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p)$ est **orthonormale** si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(\vec{x}_i \mid \vec{x}_j) = \delta_{ij}$;*
- *la famille $(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n)$ est une **base orthonormée** (BON) de E si c'est une base et une famille orthonormale.*

Proposition.— Dans un espace préhilbertien, toute famille orthonormale est libre.

Théorème.— Orthonormalisation de Gram-Schmidt —. Soit E préhilbertien réel et $(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_p)$ une famille libre de vecteurs. Alors, il existe une famille orthonormale $(\vec{\epsilon}_1,\cdots,\vec{\epsilon}_p)$ telle que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k) = \mathrm{Vect}\,(\vec{\epsilon}_1,\ldots,\vec{\epsilon}_k)$.

Savoir-faire : orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé d'orthonormalisation de G-S.

▪▪▪ Espaces vectoriels euclidiens

Corollaire.— TBONI —. Un espace vectoriel euclidien E possède des BON. Plus précisément, toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Proposition.— Calculs en BON —. Soit E eve rapporté à une BON $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$.
Soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{e}_i$ et $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \vec{e}_i$ des vecteurs de E, alors

- $\vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n (\vec{x}|\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i$,
- $(\vec{x}|\vec{y}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\, y_i$,
- $\|\vec{x}\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$

▪▪▪ Projections et symétries orthogonales

Définition : *Soit E préhilbertien réel et A une partie de E. On appelle **orthogonal** de A, et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp = \{\vec{x} \in E \mid \forall a \in A, \quad (\vec{x} \mid a) = 0\}$.*

Remarque : $A^\perp$ est toujours un sous-e.v de E, même si A ne l'est pas.

Proposition.— Supplémentaire orthogonal —. Soit E préhilbertien réel, F un sev de E de dimension finie. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$.
De plus, $F^\perp$ est le seul sev orthogonal et supplémentaire de F. On l'appelle **le** supplémentaire orthogonal de F.

Définition : *Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E.*

- *La **projection orthogonale** $p_F : E \to E$ est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*
- *La **symétrie orthogonale** $s_F : E \to E$ est la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.*

Proposition.— Caractérisation du projeté orthogonal —. Soit E préhilbertien réel, F un sev de dimension finie. Pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$,

$$\boxed{\vec{y} = p_F(\vec{x}) \iff \begin{array}{l} \bullet \quad \vec{y} \in F \\ \bullet \quad \vec{x} - \vec{y} \in F^\perp \end{array}}$$

Proposition.— Distance d'un point à un sev —. Soit E préhilbertien réel et F un sev. Pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$,

$$\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ est la distance minimale entre $\vec{x}$ et un vecteur de F. On note $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$.

Proposition.— Expression de p_F en BON —. Soit E préhilbertien réel, F un sev (de dim finie) rapporté à une BON $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$.

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \qquad p_F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} (\vec{x} \mid \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i}$$

Savoir-faire : construire la matrice représentative d'une projection, calculer la distance d'un vecteur $\vec{x}$ à F

■ ■ ■ Automorphismes orthogonaux d'un eve, matrices orthogonales

Définition : *Soit E un eve, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un **automorphisme orthogonal** s'il préserve le produit scalaire, i.e. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{y})$.*

Proposition*.— Groupe orthogonal $O(E)$ —. Soit E un eve.

- Tout automorphisme orthogonal sur E est bijectif et $\text{Det} f = \pm 1$.
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux forme un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé **groupe orthogonal** de E et noté $O(E)$.
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1 forme un sous-groupe de $(O(E), \circ)$, appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté $SO(E)$.

Proposition*.— Caractérisations des automorphismes orthogonaux —. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les asse :

$$\boxed{\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet \quad f \text{ est un automorphisme orthogonal : } \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \ \ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = (\vec{x} \mid \vec{y}) \ ; \\ \bullet \quad f \text{ préserve la norme : } \forall \vec{x} \in E, \ \ \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \ ; \\ \bullet \quad \text{Pour toute BON } \big(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\big) \text{ de } E, \ \big(f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\big) \text{ est une BON.} \end{array}}$$

Définition : *Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On dit que la matrice $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est **orthogonale** si : ${}^t\Omega \cdot \Omega = I_n$. On note $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.*

Proposition*.— Groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ —. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

- Toute matrice orthogonale Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$. En particulier $\text{Det}(\Omega) = \pm 1$.
- $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbf{R}), \times)$, appelé **groupe orthogonal** d'ordre n.
- L'ensemble $SO_n(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $(O_n(\mathbf{R}), \times)$, appelé **groupe spécial orthogonal**.

Proposition*.— Caractérisation des matrices orthogonales —. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de Ω. Les asse :

$$\boxed{\Updownarrow \begin{array}{l} \bullet \quad \Omega \in O_n(\mathbf{R}) \\ \bullet \quad (C_1, \ldots, C_n) \text{ est une BON de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \end{array}}$$

Proposition*.— Liens entre automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales —.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un eve de dimension n rapporté à une BON $\mathcal{B}$. Alors, f est orthogonal *si et seulement si* la matrice $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est orthogonale dans $O_n(\mathbf{R})$.
- Réciproquement, soit $n \in \mathbf{N}^\star$ un entier et $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à Ω. Alors, Ω est orthogonale *si et seulement si* f est un automorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^n$.

▪▪▪ Isométries du plan

Théorème*.— Structure de $O_2(\mathbf{R})$ —. Le groupe $O_2(\mathbf{R})$ des matrices orthogonales d'ordre 2 est constitué de deux types de matrices :

- Les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, pour $\theta \in \mathbf{R}$. Les matrices $R(\theta)$ sont les matrices orthogonales directes, elles forment le groupe spécial orthogonal $SO_2(\mathbf{R})$. Ce sont les matrices représentatives en BON des rotations vectorielles.
- Les matrices $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, pour $\theta \in \mathbf{R}$. Les matrices $S(\theta)$ sont les matrices orthogonales indirectes. Ce sont les matrices représentatives en BON des réflexions.

Théorème*.— Structure de $O(E)$ —. soit E un eve de dim 2 et $f \in O(E)$.

- Si $\mathrm{Det}(f) = 1$, alors f est une rotation.
- Si $\mathrm{Det}(f) = -1$, alors f est une réflexion.