# Chapitre 31

# Vecteurs aléatoires discrets

## Sommaire

# I Couples de variables aléatoires

## 1 Loi conjointe

**Définition :** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On appelle **loi du couple** $(X, Y)$ ou **loi conjointe** de $X$ et $Y$, toute famille $\big((x_i, y_j),\ p_{i,j}\big)_{(i,j)\in I\times J}$ telle que :*

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet\quad X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\},\ Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\} \\ \bullet\quad \forall (i,j) \in I \times J, p_{i,j} = P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)\end{array}}$$

**En pratique :** déterminer la loi conjointe d'un couple $(X, Y)$ de variables aléatoires, c'est :

- trouver l'ensemble des valeurs possibles pour $X$ et pour $Y$.
- pour toutes valeurs possibles $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, calculer $P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$

Lorsque $X$ et $Y$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, on présente la loi du couple $(X, Y)$ sous la forme d'un tableau à double entrée :

| Y \ X | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{1,1}$ | $p_{1,2}$ | | $p_{1,m}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $y_n$ | $p_{n,1}$ | $p_{n,2}$ | | $p_{n,m}$ |

**Exemple 1 :** Une urne contient une boule blanche, une verte et deux boules rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note $X$ le rang d'apparition de la boule blanche et $Y$ le rang d'apparition de la **deuxième** boule rouge. On représente la loi conjointe de $X$ et $Y$ sous la forme d'un tableau :

$\Omega$ est l'ensemble des anagrammes du mot $RRBV$. Comme les événements élémentaires sont équiprobables, $\Omega$ est muni de la probabilité uniforme.

$$\text{Card }\ \Omega = \frac{4!}{2!} = 12.$$

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 1/12 | 1/12 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 0 | 1/6 |
| 4 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 0 |

On en déduit aisément le tableau ci-contre.

Par exemple, $[X = 1] \cap [Y = 3] = \{BRRV\}$ et $[X = 1] \cap [Y = 4] = \{BRVR;\ BVRR\}$. D'où,

$$P[X = 1] \cap [Y = 3] = 1/12 \ \text{ et } \ P[X = 1] \cap [Y = 4] = 1/6.$$

**Proposition 31.1.—** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ de loi conjointe $\big\{\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big) :\ (i, j) \in I \times J\big\}$. Alors

**1.** $([X = x_i] \cap [Y = y_j])_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'événements.

**2.** $\forall (i,j) \in I \times J,\ \ p_{i,j} \geq 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$

**Notation :** *Comme dans le cas d'une variable aléatoire réelle, on note $\mathcal{A}_{(X,Y)}$ la tribu engendrée par les événements $([X = x_i] \cap [Y = y_j])_{(i,j)\in I\times J}$.*

**Vocabulaire :** Lorsque l'énoncé demande de *vérifier la loi d'un couple* de variables aléatoires discrètes, il s'agit de démontrer 2.

**Démonstration** $\triangledown$

La démonstration est analogue au cas d'une variable aléatoire :

- Les $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$ sont deux à deux incompatibles.
  Soient $(i, j) \in I \times J$ et $(k, l) \in I \times J$ tels que $\big([X = x_i] \cap [Y = y_j] \cap \big([X = x_k] \cap [Y = y_l] \neq \emptyset$. En ce cas, il existe $\omega \in \big([X = x_i] \cap [Y = y_j] \cap \big([X = x_k] \cap [Y = y_l]$.
  Il en résule immédiatement que $X(\omega) = x_i = x_k$. Comme les $x_i$ sont deux à deux distincts, ceci n'est possible que si $i = k$.
  De même $Y(\omega) = y_j = y_l$ et par conséquent $j = l$.
- Les $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$ *recouvrent* $\Omega$.
  Soit $\omega \in \Omega$. Les valeurs possibles pour $X$ étant données par les $x_i$, il existe $i \in I$ tel que $X(\omega) = x_i$. De même, il existe $j \in J$ tel que $Y(\omega) = y_j$. Par suite $\omega \in [X = x_i] \cap [Y = y_j]$. ▲

**Exercice :** Vérifiez la loi du couple $(X, Y)$ de l'**exemple 1**.

### 1.a Séries doubles

Dans le cas où les deux variables $X$ et $Y$ sont finies, la somme $\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j}$ est la somme de tous les éléments d'un tableau. Pour la calculer, nous pouvons sommer d'abord par lignes, ou bien par les colonnes :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{i,j}. \tag{31.1}$$

Lorsque l'une des deux variables aléatoires est finie, par exemple $Y$ et l'autre est infinie, il s'agit de sommer les éléments d'un tableau comportant un nombre fini de lignes, mais un nombre infini de colonnes ! La somme des éléments de chaque ligne est donc –sous réserve de convergence– la somme d'une série. Toutefois, il résulte des propriétés algébriques des séries convergentes que l'on peut encore sommer d'abord les lignes ou d'abord les colonnes et la formule (32.1) reste vraie dans ce contexte.

Dans le cas où les deux variables aléatoires sont infinies, il est encore possible d'intervertir l'ordre de sommation grâce au

**Théorème 31.2.—** Théorème de Fubini-Tonelli pour les séries
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ une suite indexée par $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ de **nombres positifs**. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Pour tout $i \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_j a_{i,j}$ converge vers $\displaystyle a_{i\bullet} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$
  et la série $\displaystyle\sum_i a_{i\bullet}$ converge vers $S$

$\Updownarrow$

- Pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_i a_{i,j}$ converge vers $\displaystyle a_{\bullet j} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$
  et la série $\displaystyle\sum_j a_{\bullet j}$ converge vers $S$

**Vocabulaire :** lorsque l'une des deux conditions équivalentes ci-dessus est vérifiée, on dit que **la série double** à termes positifs $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j}$ **converge vers** $S$

$$\boxed{S = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}}$$

**Démonstration** ▽
Il suffit d'appliquer le **Théorème ??** de sommation par paquets pour les séries à termes positifs, avec $I_i = \{i\} \times J$. ▲

**En pratique :** Pour vérifier qu'une *série double* à termes **positifs** est convergente, le *calcul* se fait *en deux temps* :

- vous **fixez** $i \in \mathbf{N}$ et montrez que la série $\sum_j a_{i,j}$ converge vers $a_{i\bullet} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$.
- puis vous **libérez** $i$ et prouvez que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i\bullet}$ converge vers $S$.

ou bien– à vous de choisir le sens qui se prête le mieux au calcul :

- vous **fixez** $j \in \mathbf{N}$ et montrez que la série $\sum_i a_{i,j}$ converge vers $a_{\bullet j} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$.
- puis vous **libérez** $j$ et prouvez que la série de terme général $a_{\bullet j}$ converge vers $S$.

**Exercice :** Notons pour $(i, j) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star$ $p_{i,j} = \big(1/2\big)^{i+j}$. Vérifiez qu'il s'agit d'une loi de probabilité.

*Solution* ▽

*Il est clair que les $p_{i,j}$ sont positifs. Montrons que la série double des $p_{i,j}$ est convergente de somme 1. Pour cela, le calcul se fait en deux temps :*

- *fixons $i \in \mathbf{N}^\star$.*
  *La série $\sum(1/2)^j$ est une géométrique de raison $1/2 \in ]-1; 1[$. Elle est donc convergente et de somme $1$. Par opérations algébriques sur des séries convergentes, j'en déduis que la série $\sum_{j\in\mathbf{N}}(1/2)^{i+j}$ est convergente de somme $a_{i\bullet} = (1/2)^i$.*
- *libérons $i$ !*
  *La série de terme général $a_{i\bullet} = (1/2)^i$ est encore une série géométrique de raison $1/2$. Elle converge vers 1.*

*Ainsi, d'après le théorème de* Fubini-Tonelli, *la série double des $_{i,j}$ est convergente et*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{+\infty}(1/2)^i = 1.$$

▲

Dans le cas d'une série double à termes quelconques, il faudra utiliser le

**Théorème 31.3.— Théorème de Fubini pour les séries**
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ une suite indexée par $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de nombres réels.
Si la série double $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} |a_{i,j}|$ est convergente au sens du **Théorème** 32.2, alors

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}}$$

**Vocabulaire :** dans ce cas, on dit que la série $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j}$ **converge** vers $S$ **absolument** et on note

$$\boxed{S = \sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}}$$

**En pratique :** pour calculer la somme d'une série double à termes quelconques vous *devez* d'abord vous assurer que la série est **absolument convergente** en appliquant le **Théorème** 32.2 à la série des valeurs absolues, puis procéder à une sommation en deux étapes.

**Démonstration** ▽

Supposons que la série double $\sum_{i,j} a_{i,j}$ soit absolument convergente. En ce cas, les séries doubles de termes généraux $a^+_{i,j} = \max\{a_{i,j}; 0\}$ et $a^-_{i,j} = \max\{-a_{i,j}; 0\}$ sont aussi convergentes par comparaison. D'après le **Théorème** 32.2, il en résulte que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a^+_{i,j} &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a^+_{i,j}\\ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a^-_{i,j} &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a^-_{i,j}\end{aligned}$$

Le résultat en découle par soustraction. ▲

## 2 Lois marginales

**Définition :** *Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. Les lois de $X$ et $Y$ sont appelées les* ***lois marginales du couple*** *$(X, Y)$.*

**Notation :** *Soit* $(i,j) \in I \times J$, *on note* $p_{i\bullet} = P[X = x_i]$ *et* $p_{\bullet j} = P[Y = y_j]$.

La proposition suivante montre que la connaissance de la loi conjointe de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ permet de déterminer leurs lois de probabilité, plus précisément

**Proposition 31.4.—** Soit $(X,Y)$ un couple de v.a.r. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi conjointe $\{(x_i,y_j), p_{i,j}\}$. Alors

- $\forall i \in I$, $p_{i\bullet} = P[X = x_i] = P\Big(\bigcup_{j\in J} [X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big) = \sum_{j\in J} p_{i,j}$.
- $\forall j \in J$, $p_{\bullet j} = P[Y = y_j] = P\Big(\bigcup_{i\in I} [X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big) = \sum_{i\in I} p_{i,j}$.

**Démonstration** ▽
D'après la **Proposition ??**, les familles $\big([Y = y_j]\big)_i$ et $\big([X = x_i]\big)_i$ sont des systèmes complets d'événements. Aussi pouvons-nous écrire –en utilisant la distributivité de $\cap$ sur $\cup$ :

$$\begin{aligned} p_{i\bullet} &= P[X = x_i] = P\big([X = x_i] \cap \Omega\big) = P\Big([X = x_i] \cap \bigcup_{j\in J} [Y = y_j]\Big) \\ &= P\Big(\bigcup_{j\in J} [X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big) = \sum_{j\in J} P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = \sum_{j\in J} p_{i,j}, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la $\sigma$-additivité de $P$. ▲

**En pratique :** lorsqu'il s'agit de variables aléatoires finies dont la loi conjointe est donnée par un tableau, il suffit de rajouter en *marge* du tableau une colonne correspondant aux sommes *ligne par ligne* et une ligne correspondant aux sommes *colonne par colonne* pour obtenir les *lois marginales* du couple.

Reprenons l'**exemple 1**, nous déduisons de la loi conjointe de $X$ et de $Y$ les lois marginales de $X$ et $Y$ :

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 1/12 | 1/12 | 1/6 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 0 | 1/6 | 1/3 |
| 4 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 0 | 1/2 |
| total | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | |

Loi marginale de $X$

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P[X = x_i]$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

Loi marginale de $Y$

| $y_j$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P[Y = y_j]$ | 1/6 | 1/3 | 1/2 |

**Exercice :** Soit $(X,Y)$ un couple de v.a.r. discrètes défini sur un espace probabilié $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}, \quad P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = a\,\frac{(1/2)^{i+j}}{j!},$$

où $a \in \mathbf{R}$.

**1.** Déterminez $a$.

**2.** Déterminez les lois marginales de $X$ et $Y$.

*Solution* ▽

**1.** *Pour déterminer* $a$, *nous exploitons la propriété* $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$ :

- *Soit* $i \in \mathbf{N}^\star$ *fixé.*
  *La série* $\sum_j \frac{(1/2)^j}{j!}$ *est une série exponentielle, donc convergente. Par opérations algébriques sur une série conver-*

*gente, j'en déduis que la série* $\sum_{j\in\mathbf{N}} \frac{(1/2)^{i+j}}{j!}$ *est convergente de somme*

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=0}^{+\infty} a\ \frac{(1/2)^{i+j}}{j!} = a\ (1/2)^i\ e^{1/2}.$$

- *Libérons* $i$ *!*
  *La série* $\sum_{i\in\mathbf{N}^\star} (1/2)^i$ *est une série géométrique –incomplète– de raison* $1/2 \in ]-1;1[$*. Elle est donc convergente.*
  *Par opérations algébriques, j'en déduis finalement que la série* $\sum_{i\in\mathbf{N}^\star} p_{i\bullet}$ *est convergente de somme :*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a\ (1/2)^i\ e^{1/2} = a\ \sqrt{e} \times 2 \times \frac{1}{2} = a\ \sqrt{e}.$$

*D'après le théorème de* FUBINI-TONELLI*, la série double* $\sum p_{i,j}$ *est convergente vers* $a\sqrt{e}$*. Comme* $\big(p_{i,j}; i, j\big)_{(i,j)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ *est une loi de probabilité, il en résulte que* $a\sqrt{e} = 1$*, i.e.* $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$*. Ainsi,*

$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}, \quad p_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ \frac{(1/2)^{i+j}}{j!}.$$

- *Calculons les lois marginales de* $X$ *et* $Y$*. D'après la* **Proposition** *32.4, elles sont obtenues par sommation partielle :*
  - *soit* $i \in \mathbf{N}^\star$ *fixé, nous avons déjà calculé* $p_{i,\bullet}$*. En effet*

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{i,j} = (1/2)^i \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^j}{j!} = (1/2)\ (1/2)^{i-1}$$

  *Par conséquent,* $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(1/2)$*.*
  - *soit* $j \in \mathbf{N}$ *fixé, alors*

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ \frac{(1/2)^j}{j!} \sum_{i=1}^{+\infty} (1/2)^i = \frac{1}{\sqrt{e}}\ \frac{(1/2)^j}{j!}.$$

  *Par conséquent,* $Y \rightsquigarrow \mathscr{P}(1/2)$*.* ▲

Nous avons vu que la connaissance de la loi conjointe de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ permet de déterminer leurs lois de probabilité. En revanche, la connaissance des lois de probabilités de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ ne permet pas en général de déterminer la loi du couple $(X, Y)$ comme le montre l'exemple suivant :

**Exercice :** On considère deux couples $(X_1, Y_1)$ et $(X_2, Y_2)$ de v.a.r. définis sur espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On donne les lois conjointes de $(X_1, Y_1)$ et $(X_2, Y_2)$ :

| $Y_1$ \ $X_1$ | -1 | 0 | 1 | total |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1/4 | 0 | |
| 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | |
| 1 | 0 | 1/4 | 0 | |
| total | | | | |

| $Y_2$ \ $X_2$ | -1 | 0 | 1 | total |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 1/16 | 1/8 | 1/16 | |
| 0 | 1/8 | 1/4 | 1/8 | |
| 1 | 1/16 | 1/8 | 1/16 | |
| total | | | | |

Déterminez les lois de $X_1$, $X_2$, $Y_1$ et $Y_2$. Conlusion ?

## 3 Lois conditionnelles

**Définition :** *Soient* $X$ *une v.a.r. discrète définie sur un espace probabilisé* $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ *et* $A \in \mathcal{A}$ *un événement non négligeable (i.e.* $P(A) > 0$*).*
*On appelle* ***loi de*** $X$ ***conditionnée par*** $A$ *ou* ***loi de*** $X$ ***sachant*** $A$ *l'ensemble des couples*

$$\big\{\big(x_i, P_A[X = x_i]\big),\ i \in I\big\},$$

*où* $P_A[X = x_i] = \frac{P\big(A \cap [X = x_i]\big)}{P(A)}$*.*

**Remarque :** Comme les $\big([X = x_i]\big)_{i\in I}$ forment d'après la **Proposition ??** un système complet d'événements, la loi de $X$ sachant $A$ vérifie :

$$\sum_{i\in I} P_A[X = x_i] = P_A(\Omega) = 1.$$

Reprenons l'**exemple 1** et déterminons la loi de $X$ sachant $Y = 2$, puis la loi de $X$ sachant $Y = 3$ et la loi de $X$ sachant $Y = 4$. Nous obtenons

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | 1/12 | 1/12 | 1/6 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 0 | 1/6 | 1/3 |
| 4 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 0 | 1/2 |
| total | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | |

Lois de $X$ sachant $Y$

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_{[Y=2]}[X = x_i]$ | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| $P_{[Y=3]}[X = x_i]$ | 1/4 | 1/4 | 0 | 1/2 |
| $P_{[Y=4]}[X = x_i]$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 0 |

Ceci conduit à adopter la définition suivante :

**Définition :** *Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ de loi $\big\{\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big),\ (i, j) \in I \times J\big\}$.*
*On appelle **loi de $X$ conditionnée par $Y$** l'ensemble de couples :*

$$\big\{\big((x_i, y_j); P[X = x_i \,|\, Y = y_j]\big),\ (i, j) \in I \times J\big\}$$

**En pratique :** déterminer la loi de $X$ conditionnée par $Y$, c'est calculer, pour tout couple $(i, j) \in I \times J$, la probabilité $P\big([X = x_i \,|\, Y = y_j]\big)$. Pour cela, il y a deux méthodes :

- si vous connaissez la loi du couple de $(X, Y)$ –et donc la loi de $Y$–, la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y$ est obtenue par
$$P[X = x_i |\, Y = y_j] = \frac{p_{i,j}}{p_{\bullet\, j}}.$$
- si vous ne connaissez pas la loi de $(X, Y)$, vous supposez que $[Y = y_j]$ est réalisé. Le nombre $P[X = x_i|\, Y = y_j]$ est la probabilité que $[X = x_i]$ se réalise.

**Exercice :** Un concours se déroule en deux étapes :

**l'écrit :** tous les candidats passent une série d'épreuves écrites,

**l'oral :** les candidats ayant réussi leurs écrits se présentent pour un oral.

- On admet que le nombre de candidats admissibles, *i.e.* ayant réussi l'écrit, est une variable aléatoire $N$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- On admet qu'un candidat se présentant à l'oral est définitivement admis au concours avec la probabilité $p \in ]0, 1[$.
- On note $A$ la variable aléatoire correspondant au nombre de candidats définitivement admis.

**1.** Déterminez la loi de $A$ sachant $N$.

**2.** En déduire la loi de $A$.

*Solution* $\triangledown$

**1.** *Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé, supposons que $[N = n]$ soit réalisé. Ainsi, $n$ candidats se présentent à l'oral. Notons $A_n$ le nombre de candidats définitivement admis à l'issue des oraux. $A_n$ est donc le nombre succès obtenus en $n$ expérience de* Bernouilli *indépendantes les unes des autres et de même paramètre $p$. Par conséquent, $A_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Finalement, en notant $q = 1 - p$, nous obtenons :*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P[A = k|N = n] = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k},$$

*étant entendu que $P[A = k|N = n] = 0$ si $n < k$.*

**2.** *Soit $k \in \mathbf{N}$. Pour calculer $P[A = k]$, j'utilise la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $[N = n]$, j'obtiens :*

$$\begin{aligned} P[A = k] &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big([A = k] \cap [N = n]\big) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P\big([A = k] \cap [N = n]\big) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P[A = k | N = n] \times P[N = n] \end{aligned}$$

*Comme par hypothèse $N$ suit la loi de* Poisson *de paramètre $\lambda$ et que d'après la question précédente, $A$ sachant $[N = n]$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, il vient :*

$$\begin{aligned} P[A = k] &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\, (\lambda\, p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda\, q)^{n-k}}{k!\, (n-k)!} \\ &= e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda\, q)^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

*Finalement, le changement d'indice $k \leftarrow n - k$, montre que cette dernière série est une série exponentielle et donne :*

$$P[A = k] = e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!} e^{\lambda\, q} = e^{-\lambda\, p}\, \frac{(\lambda\, p)^k}{k!}.$$

*Ceci étant valide pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, j'en déduis que $A$ suit une loi de* Poisson *de paramètre $\lambda\, p$.* ▲

## 4 Indépendance de deux variables aléatoires

**Définition :** *Deux v.a.r. discrètes $X$ et $Y$ sont dites* ***indépendantes*** *lorsque*

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P\big([X = x_i]\big) \times P\big([Y = y_j]\big).$$

Commentaires : cette propriété se traduit par

$$\forall (i, j) \in I \times J,\ p_{i,j} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}.$$

**Remarque :** Nous avons déjà observé qu'en général, la connaissance des lois de deux variables aléatoires, ne suffit pas pour déterminer –de façon unique– la loi conjointe de $X$ et $Y$. C'est pourtant le cas, lorsque les variables $X$ et $Y$ sont supposées indépendantes.

**Exercice :** Les variables $X$ et $Y$ de l'**exemple 1** sont-elles indépendantes ?

**Exercice :** On considère deux couples de variables aléatoires dont les lois conjointes sont données par les tableaux suivants :

| $Y_1$ \ $X_1$ | 0 | 1 | 2 | total |
|---|---|---|---|---|
| 0 | a | 11a | a | |
| 1 | 6a | 5a | 6a | |
| total | | | | |

| $Y_2$ \ $X_2$ | 0 | 1 | 2 | total |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2b | 8b | 4b | |
| 1 | 3b | 12b | 6b | |
| total | | | | |

**1.** Déterminez $a$ et $b$.

**2.** Les variables $X_1$ et $Y_1$ sont-elles indépendantes ?

**3.** Les variables $X_2$ et $Y_2$ sont-elles indépendantes ?

**Proposition 31.5.—** Soit $(X,Y)$ un couple de v.a.r. discrètes indépendantes. Alors, pour toutes parties $A$ et $B$ de $\mathbf{R}$,

$$\boxed{P[X\in A \text{ et } X\in B] = P[X\in A]\times P[X\in B]}$$

**Démonstration** ▽
Soit $\big\{\big((x_i,y_j);p_{i,j}\big);\ (i,j)\in I\times J\big\}$ la loi du couple $(X,Y)$. Etant donnés $A$ et $B$ deux parties de $\mathbf{R}$, nous pouvons écrire en utilisant la distributivité de $\cap$ sur $\cup$ puis de $\cup$ sur $\cap$ :

$$\begin{aligned}
[X\in A]\cap[X\in B] &= \Big(\bigcup_{\substack{i\in I\\ x_i\in A}}[X=x_i]\Big)\bigcap\Big(\bigcup_{\substack{j\in J\\ y_j\in B}}[Y=y_j]\Big)\\
&= \bigcup_{\substack{i\in I\\ x_i\in A}}\Big([X=x_i]\cap\bigcup_{\substack{j\in J\\ y_j\in B}}[Y=y_j]\Big)\\
&= \bigcup_{\substack{i\in I\\ x_i\in A}}\bigcup_{\substack{j\in J\\ y_j\in B}}\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big).
\end{aligned}$$

D'après la **Proposition** 32.1, les événements $\Big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\Big)$ forment un système complet. En particulier, ils sont deux à deux incompatibles. D'après la $\sigma$-additivité de $P$ (**Proposition ??**), nous en déduisons

$$\begin{aligned}
P\big([X\in A]\cap[X\in B]\big) &= \sum_{i\,|\,x_i\in A}\ \sum_{j\,|\,y_j\in B} P\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)\\
&= \sum_{i\,|\,x_i\in A}\ \sum_{j\,|\,y_j\in B} P[X=x_i]\times P[Y=y_j]\\
&= \sum_{i\,|\,x_i\in A} P[X=x_i]\times\Big(\sum_{j\,|\,y_j\in B} P[Y=y_j]\Big)\\
&= \sum_{i\,|\,x_i\in A} P[X=x_i]\times\sum_{j\,|\,y_j\in B} P[Y=y_j]\\
&= P[X\in A]\times P[Y\in B].
\end{aligned}$$

▲

## 5 Loi d'une fonction d'un couple de variables aléatoires

**Proposition 31.6.—** Soient $(X,Y)$ un couple de v.a.r. sur l'espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$ et $g : X(\Omega)\times Y(\Omega)\to\mathbf{R}$ une fonction définie sur l'ensemble des valeurs possibles pour le couple $(X,Y)$. On définit une nouvelle variable aléatoire $Z=g(X,Y)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} Z: & \Omega & \to & \mathbf{R}\\ & \omega & \mapsto & g\big(X(\omega),Y(\omega)\big)\end{array}$$

**Démonstration** ▽
La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la **Proposition 17.17**. ▲

**Exemples :**

— Lorsque $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est définie par $g(x,y)=x+y$, la variable $g(X,Y)$ est simplement la somme $X+Y$ des variables $X$ et $Y$.

— Lorsque $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est définie par $g(x,y)=x\times y$, $g(X,Y)$ est le produit $X\times Y$.

— Lorsque $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est définie par $g(x,y)=\max\{x,y\}$, $g(X,Y)$ est simplement $\max\{X,Y\}$.

— Lorsque $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est définie par $g(x,y)=\min\{x,y\}$, $g(X,Y)$ est simplement $\min\{X,Y\}$.

La connaissance des lois de $X$ et $Y$ ne suffisent pas –en général– à déterminer celle de $Z$. Il est nécessaire de connaître la loi **conjointe** de $X$ et $Y$. Plus précisément :

**Proposition 31.7.—** Soient $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur l'ensemble des valeurs possibles pour le couple $(X, Y)$. On note $Z = g(X, Y)$. Alors

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{R}, \quad P[Z = z] = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)}$$

Commentaires : la somme est étendue à l'ensemble des couples, antécédents de $z$ par $g$.

**Démonstration** $\triangledown$
Remarquons tout d'abord que $Z(\Omega)$ est au plus dénombrable (*i.e.* en bijection avec une partie de $\mathbf{N}$).
De plus, si $z \in \mathbf{R}$, alors le sous-ensemble $\{\omega \in \Omega \,|\, Z(\omega) = z\}$ s'écrit comme la réunion d'événements $[X = x] \cap [Y = y]$. Plus précisément

$$[Z = z] = \bigcup_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} [X = x] \cap [Y = y].$$

Or, les $[X = x] \cap [Y = y]$ sont éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Grâce à la stabilité de la tribu par la réunion dénombrable, il en résulte que $[Z = z] \in \mathcal{A}$ est élément de la tribu. C'est donc un événement.
Remarquons enfin que ces événenements $[X = x] \cap [Y = y]$ sont deux à deux incompatibles. Par $\sigma$-additivité de $P$, il s'ensuit que :

$$P[Z = z] = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

▲

**Remark :** la démonstration de la **Proposition** 32.7 prouve aussi la **Proposition** 32.6.

### 5.a Loi de la somme de deux variables

Dans le cas particulier où $g(x, y) = x + y$, la **Proposition** 32.7 se traduit par

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad P[X + Y = z] = \sum_{x+y=z} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

Lorsque de plus $X$ et $Y$ sont à valeurs entières, nous obtenons :

**Corollaire 31.8.—** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. On note $Z = X + Y$. Alors $Z$ est aussi à valeurs dans $\mathbf{N}$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} P\big([X = k] \cap [Y = n - k]\big)}$$

Si de plus $X$ et $Y$ sont **indépendantes**, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad P[X + Y = n] = \sum_{k=0}^{n} P[X = k] \times P[Y = n - k]}$$

**Remarque :** Dans ce dernier cas particulier, la convergence des produits de convolution de séries (**Théorème** 28.11) permet de vérifier la loi de $Z$. Ce point sera revu en détail en deuxième année.

**Exemple :** Déterminons la loi de la somme $Z = X + Y$, lorsque la loi du couple $(X, Y)$ est donnée par le tableau :

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/30 $\boxed{0}$ | 6/30 $\boxed{1}$ | 6/30 $\boxed{2}$ | 1/30 $\boxed{3}$ |
| 1 | 3/30 $\boxed{1}$ | 8/30 $\boxed{2}$ | 3/30 $\boxed{3}$ | 0 $\boxed{4}$ |
| 2 | 1/30 $\boxed{2}$ | 1/30 $\boxed{3}$ | 0 $\boxed{4}$ | 0 $\boxed{5}$ |

*J'indique dans chaque case du tableau la valeur de* $\boxed{Z}$

Ainsi, les valeurs possibles pour $Z = X + Y$ sont $Z(\Omega) = [\![0, 5]\!]$. De plus,

$$\begin{array}{rcl} P[Z=0] & = & P[X=0, Y=0] = 1/30 \\ P[Z=1] & = & P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0] = 9/30 \\ P[Z=2] & = & P[X=0, Y=2] + P[X=1, Y=1] + P[X=2, Y=0] = 15/30 \\ P[Z=3] & = & P[X=1, Y=2] + P[X=2, Y=1] + P[X=3, Y=0] = 5/30 \\ P[Z=4] & = & 0 \\ P[Z=5] & = & 0 \end{array}$$

**Exercice :** Soient $X_1, X_2$ deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X_1 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$. Déterminez la loi de $X_1 + X_2$.

*Solution* $\triangledown$

*Notons $Z = X_1 + X_2$. Il est clair que $Z(\Omega) = \mathbf{N}$. De plus, comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, nous pouvons écrire avec la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k \in \mathbf{N}}$, que*

$$\begin{array}{rcl} P[Z=n] & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P[Z = n \cap X_1 = k] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P[X_1 + X_2 = n | X_1 = k] \times P[X_1 = k] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P[X_1 = k] \times P[X_2 = n-k]. \end{array}$$

*Comme par hypothèse, $X_1$ et $X_2$ suivent des lois de* Poisson *de paramètres $\lambda_1$ et $\lambda_2$, il résulte finalement de la formule du binôme de* Newton *que :*

$$\begin{array}{rcl} P[Z=n] & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \\ & = & e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}. \end{array}$$

*Par conséquent, $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.* ▲

### 5.b Loi du produit de deux variables

Dans le cas particulier où $g(x, y) = x \times y$, la **Proposition** 32.7 se traduit par

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad P[X \times Y = z] = \sum_{x \times y = z} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

### 5.c Loi du maximum de deux variables

Dans le cas particulier où $g(x, y) = \max\{x, y\}$, la **Proposition** 32.7 se traduit par

$$\forall z \in \mathbf{R}, \quad P[\max\{X, Y\} = z] = \sum_{\max\{x, y\} = z} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

**En pratique :** il est souvent préferable de déterminer d'abord $P[Z \leq z]$, puis $P[Z = z]$.

**Exercice :** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in ]0, 1[$.

**1.** Déterminez la loi $M = \max\{X, Y\}$.

**2.** Déterminez la loi de $N = \min\{X, Y\}$.

*Solution* $\triangledown$

**1.** *Il est clair que $M(\Omega) = \mathbf{N}^\star$. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, calculons d'abord la probabilité que $M$ soit inférieur à $n$. Pour cela, il est important de remarquer que $[M \leq n] = [X \leq n] \cap [Y \leq n]$. Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, il en résulte que $P[M \leq n] = P[X \leq n] \times P[Y \leq n]$.*
*Calculons $P[X \leq n]$. Comme par hypothèse, $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, il vient*

$$P[X \leq n] = \sum_{k=1}^{n} P[X = k] = p \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 - q^n,$$

*où $q$ désigne comme d'habitude $1 - p$.*
*De même, $P[Y \leq n] = 1 - q^n$ et par conséquent,*

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad P[M \leq n] = \big(1 - q^n\big)^2.$$

*Pour conclure, utilisons l'astuce usuelle $P[M = n] = P[M \leq n] - P[M \leq n-1]$, valide pour $n \in \mathbf{N}^\star$, avec la convention que $P[M = 0] = 0$. Il en résulte pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$,*

$$\begin{aligned} P[M = n] &= \big(1 - q^n\big)^2 - \big(1 - q^{n-1}\big)^2 = \big[(1 - q^n) - (1 - q^{n-1})\big] \times \big[(1 - q^n) + (1 - q^{n-1})\big] \\ &= pq^{n-1} \times \big[2 - q^n - q^{n-1}\big]. \end{aligned}$$

**2.** *L'ensemble des valeurs possibles pour $N$ est $N(\Omega) = \mathbf{N}^\star$. Pour déterminer la loi de $N$, il est préférable de commencer par déterminer la probabilité que $N$ soit supérieur à $n \in \mathbf{N}^\star$. En effet, pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$,*

$$[N \geq n] = [X \geq n] \cap [Y \geq n]$$

*Comme par hypothèse, les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes, nous en déduisons que*

$$P[N \geq n] = P[X \geq n] \times P[Y \geq n]$$

*D'après la première question, nous savons que $P[X \geq n] = 1 - P[X \leq n-1] = 1 - (1 - q^{n-1}) = q^{n-1}$. Par suite,*

$$P[N \geq n] = P[X \geq n] \times P[Y \geq n] = q^{2n-2}.$$

*Finalement, il en résulte que*

$$P[N = n] = P[N \geq n] - P[N \geq n+1] = q^{2n-2} - q^{2n} = (1 - q^2) \times (q^2)^{n-1}$$

*Ainsi, $N$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.* ▲

# II Moments

## 1 Propriétés de l'espérance

### 1.a Théorème de Transfert

**Théorème 31.9.—** Théorème de transfert
Soient $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ de loi $\big\{\big((x_i, y_j); p_{i,j}\big);\ (i, j) \in I \times J\big\}$ et $Z = g(X, Y)$, une fonction du couple, où $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbf{R}$. Alors

$$Z \text{ admet une espérance } \textit{ssi} \text{ la série double } \sum_{(i,j)\in I\times J} g(x_i, y_j)\, p_{i,j} \text{ est absolument convergente.}$$

En ce cas, l'espérance de $Z$ est donnée par

$$\boxed{E(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} g(x_i, y_j)\ p_{i,j}}$$

COMMENTAIRES : comme dans le cas d'une seule variable réelle discrète, vous remarquez que le THÉORÈME DE TRANSFERT permet de calculer l'espérance de $Z = g(X, Y)$ **sans expliciter la loi de Z**. C'est la raison pour laquelle le théorème de transfert est **incontournable** en ce contexte.

**En pratique :**

- lorsque $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires finies dont la loi conjointe est donnée par un tableau, vous pouvez calculer l'espérance de $g$ directement en indiquant dans la case $(i, j)$, la valeur $g(x_i, y_j)$ correspondante.

si $g(x, y) = x \times y$, nous obtenons $E(Z) = 0,1$

| Y \ X | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0,1 $\boxed{2}$ | 0,2 $\boxed{1}$ | 0,1 $\boxed{-1}$ | 0,1 $\boxed{-2}$ |
| 0 | 0,1 $\boxed{0}$ | 0 $\boxed{0}$ | 0 $\boxed{0}$ | 0,1 $\boxed{0}$ |
| 1 | 0,1 $\boxed{-2}$ | 0 $\boxed{-1}$ | 0,2 $\boxed{1}$ | 0 $\boxed{2}$ |

- lorsque $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires discrètes infinies, il s'agit d'une série double. Pour démontrer qu'elle est absolument convergente vous appliquez le THÉORÈME DE FUBINI-TONELLI à la série des valeurs absolues.

**Démonstration** ▽

Supposons pour simplifier que les variables aléatoires $X$ et $Y$ soient finies. En ce cas,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z \cdot P([Z = z]) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z \cdot \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P\big([X = x] \cap [Y = y]\big) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} g(x, y)\ P\big([X = x] \cap [Y = y]\big) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{\substack{(i,j)\in I\times J\\ g(x_i,y_j)=z}} g(x_i, y_j)\ P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).
\end{aligned}$$

A ce stade du calcul, il faut remarquer que les ensembles d'indices

$$I_z = \Big\{(i, j) \in I \times J;\ g(x_i, y_j) = z\Big\}_{z\in Z(\Omega)}$$

forment une partition de $I \times J$. Ainsi, nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{\substack{(i,j)\in I\times J\\ g(x_i,y_j)=z}} g(x_i, y_j)\ P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) \\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J} g(x_i, y_j)\ P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).
\end{aligned}$$

▲

**Remarque :** Dans le cas de variables aléatoires discrètes infinies, l'idée de la démonstration est la même. La *sommation par les paquets* $(I_z)_{z\in Z(\Omega)}$ étant légitimée par le **Théorème ??**.

### 1.b Linéarité de l'espérance

En appliquant le **Théorème** 32.9 à la fonction *linéaire* $g$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad g(x, y) = a \cdot x + b \cdot y,$$

nous obtenons la **propriété fondamentale** :

**Théorème 31.10.—** LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE
Soient $X, Y$ deux v.a.r. définies sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ admettant des espérances et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
Alors $Z = a \cdot X + b \cdot Y$ admet une espérance et :

$$\boxed{E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)}$$

**Démonstration** $\triangledown$

Notons $\{((x_i, y_j); p_{i,j});\ (i,j) \in I \times J\}$ la loi du couple $(X, Y)$, et considérons la fonction $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, définie par $g(x, y) = ax + by$.

• Existence de l'espérance :

D'après le Théorème de transfert, il suffit de vérifier que la série double

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |ax_i + by_j|\ p_{i,j}$$

converge. Or d'après l'inégalité triangulaire, $|ax_i + by_j| \le |a||x_i| + |b||y_j|$. Il suffit donc de prouver la convergence des séries doubles

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |a||x_i|\ p_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j)\in I\times J} |b||y_j|\ p_{i,j}.$$

Les deux séries se traitent de manière parfaitement analogue, démontrons la convergence de la première. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, le Théorème de Fubini-Tonelli s'applique :

- *Fixons* $i \in I$ :

$$\sum_{j\in J} |a||x_i|\, p_{i,j} = ax_i \sum_{j\in J} p_{i,j} = |a||x_i| p_{i\bullet}$$

- *Libérons* $i$ !

$$\sum_{i\in I} |a||x_i| p_{i\bullet} = |a| \sum_{i\in I} |x_i| P[X = x_i]$$

  qui converge puisque par hypothèse $X$ admet une espérance.

D'après le Théorème de Fubini-Tonelli, il en résulte que la série –double– de terme général $|a||x_i|\,p_{i,j}$ est absolument convergente. De même, la série –double– de terme général $|y_j| p_{i,j}$ est asbsolument convergente.

Par comparaison pour les séries –doubles– à termes positifs, il en résulte que la série

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} (ax_i + by_j)\ p_{i,j}$$

est absolument convergente et par conséquent $Z = g(X, Y)$ admet une espérance.

• Calcul de $E(Z)$ :

Le Théorème de transfert permet en outre d'affirmer que

$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} (ax_i + by_j)\ p_{i,j}$$

En procédant en deux étapes comme ci-dessus, nous en déduisons la valeur de $E(Z)$ :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{(i,j)\in I\times J} (ax_i + by_j)\ p_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} ax_i\ p_{i,j} + \sum_{(i,j)\in I\times J} by_j\ p_{i,j} \\ &= \sum_i \sum_j ax_i\ p_{i,j} + \sum_j \sum_i by_j\ p_{i,j} = a \sum_i x_i\ p_{i\bullet} + b \sum_j y_j\ p_{\bullet j} \\ &= aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

▲

## 1.c Espérance d'un produit de variables aléatoires

En appliquant le **Théorème** 32.9 à la fonction $g$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad g(x, y) = x \times y$, nous obtenons la propriété suivante :

**Théorème 31.11.—** Soit $(X, Y)$ un couple de v.a.r. discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{((x_i, y_j); p_{i,j});\ (i,j) \in I \times J\}$.

Sous réserve d'absolue convergence des séries ci-dessous, l'espérance de $Z = X \times Y$ est donnée par la formule :

$$\boxed{E(X \times Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i \times y_j\ P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)}$$

Dans le cas particulier de variables **indépendantes**, nous déduisons le résultat **très important** :

**Théorème 31.12.—** ESPÉRANCE D'UN PRODUIT DE VARIABLES INDÉPENDANTES
Soient $X, Y$ deux v.a.r. discrètes **indépendantes**.
On suppose que $X$ et $Y$ admettent une espérance. Alors $X \times Y$ admet un espérance qui est donnée par :

$$\boxed{E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)}$$

**Démonstration** ▽
D'après le **Théorème** 32.11, $Z$ admet une espérance *si et seulement si* la série double

$$\sum_{(i,j)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}} |x_i| \times |y_j|\, p_{i,j}$$

est convergente.
D'après le THÉORÈME DE FUBINI-TONELLI, nous pouvons sommer cette série double en deux étapes :

- *Fixons* $j \in J$.
  Comme par hypothèse $X$ et $Y$ sont indépendantes pour tout $i \in I$, $p_{i,j} = p_{i,\bullet} \times p_{\bullet j}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} E_{\bullet j} &= \sum_{i\in I} |x_i|\, |y_j| p_{i,j} \\ &= \sum_{i\in I} |x_i|\, |y_j|\, p_{i,\bullet} \times p_{\bullet j} \\ &= |y_j| \times p_{\bullet j} \sum_{i\in I} |x_i|\, p_{\bullet j}, \end{aligned}$$

  la convergence de cette dernière série étant garantie vu que $X$ admet une espérance.

- *Libérons* $j$ *!* Comme par hypothèse $Y$ admet aussi une espérance, la série $\sum_{j\in J} E_{\bullet j}$ converge et

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} E_{\bullet j} &= \sum_{j\in J} |y_j| \times p_{\bullet j} \times \big(\sum_{i\in I} |x_i|\, p_{\bullet j}\big) \\ &= \big(\sum_{i\in I} |x_i|\, p_{\bullet j}\big) \times \sum_{j\in J} |y_j| \times p_{\bullet j}. \end{aligned}$$

D'après le THÉORÈME DE FUBINI-TONELLI pour les séries doubles, il en résulte que la série double

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i \times y_j\, P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$$

est absolument convergente. Donc, d'après le **Théorème** 32.11, $X \times Y$ admet une espérance.

Finalement, calculons $E(X \times Y)$. Les séries qui apparaissent dans le calcul ci-après sont absolument convergentes, aussi pouvons-nous écrire grâce au **Théorème** 32.3 :

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_i\, y_j\, p_{i,j} &= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_i\, y_j\, P([X = x_i]) \times P([Y = y_j]) \\ &= \sum_{j\in J} \big(y_j\, p_{\bullet j} \sum_{i\in I} x_i\, p_{i,\bullet}\big) \\ &= \sum_{j\in J} \big(y_j\, p_{\bullet j} \times E(X)\big) \\ &= E(X) \times \sum_{j\in J} y_j\, P([Y = y_j]) \\ &= E(X) \times E(Y). \end{aligned}$$

▲

## 2 Variance d'une somme et covariance

D'après le **Théorème** 32.10, la somme de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ admettant une espérance admet une espérance qui est donnée par :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Supposons de plus que $X$ et $Y$ admettent une variance. En ce cas, nous pouvons[1] écrire grâce à la linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X+Y)\big]^2 \\ &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X)+E(Y)\big]^2 \\ &= E\big[X^2+2XY+Y^2\big] - \big[E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\big] \\ &= \big(E(X^2)-E(X)^2\big) + \big(E(Y^2)-E(Y)^2\big) + 2\big(E(XY)-E(X)E(Y)\big) \\ &= V(X) + V(Y) + 2\big(E(XY)-E(X)E(Y)\big). \end{aligned}$$

Ce calcul préliminaire montre qu'en général, la variance de la somme $X+Y$ n'est pas égale à la somme des variances de $X$ et de $Y$ : il apparaît un terme "rectangle" : c'est la *covariance* de $X$ et $Y$.

### 2.a Covariance de variables aléatoires

**Définition :** *Soit $(X,Y)$ un couple de v.a.r. discrètes sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$. On suppose que $X$ et $Y$ admettent[2] un moment d'ordre 2. On appelle* ***covariance*** *de $X$ et $Y$, la quantité*

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big]}$$

**Remarques :**

**1.** le fait que $X$ et $Y$ admettent des moments d'ordre 2 sert à garantir l'absolue convergence de la série $E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big]$.

**2.** Lorsque $X=Y$, nous obtenons simplement $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

**Proposition 31.13.—** Formule de Huygens pour la covariance
Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$. On suppose que $X$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2. Alors

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Commentaires : dans la pratique, on préfère utiliser cette formule plutôt que celle de la définition de la covariance.

**Démonstration** ▽
Notons pour alléger $m_X = E(X)$ et $m_Y = E(Y)$. Alors par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E\big((X-m_X)(Y-m_Y)\big) \\ &= E\big(XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y)\big) \\ &= E\big(XY\big) - m_X m_Y - m_Y m_X + m_X m_Y \\ &= E\big(XY\big) - m_X m_Y = E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

▲

Nous en déduisons grâce au **Théorème** 32.12 :

**Corollaire 31.14.—** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes sur un espace probabilisé $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\boxed{\textbf{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, } \textbf{alors } \mathrm{Cov}(X,Y) = 0}$$

1. la convergence des séries ci-après sera justifiée plus loin
2. une variance, ou ce qui revient au même

**Démonstration** ▽
En effet, d'après le **Théorème** 32.12, $E(XY) = E(X)E(Y)$. ▲

**Exercice :** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires de loi conjointe :

| $Y$ \ $X$ | 0 | 1 | 2 | total |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1/30$ | $11/30$ | $1/30$ | |
| 1 | $6/30$ | $5/30$ | $6/30$ | |
| total | | | | |

1. $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?
2. Calculez la covariance de $(X, Y)$.
3. Concluez !

### 2.b Variance d'une somme de variables aléatoires

Nous pouvons à présent reprendre le calcul préliminaire. Il s'énonce de la façon suivante :

**Théorème 31.15.—** Soient $X$ et $Y$ des v.a.r. discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X$ et $Y$ admettent un moment d'ordre 2.
Alors $X + Y$ admet une variance et

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

**Démonstration** ▽
L'inégalité $2\,|xy| \leq x^2 + y^2$ montre que la variable aléatoire $XY$ possède une espérance. Par linéarité de l'espérance, il s'ensuit que $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ admet aussi une espérance et donc que $X+Y$ possède une variance. Reprenons alors le calcul préliminaire, il vient

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\big[(X+Y)^2\big] - \big[E(X+Y)\big]^2 \\ &= V(X) + V(Y) + 2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors directement de la formule de Huygens $\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) = \mathrm{Cov}(X,Y)$ pour lea covariance.
▲

En particulier, lorsque les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, leur covariance est nulle. Nous en déduisons :

**Théorème 31.16.—** Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes
Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. discrètes **indépendantes** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors $X + Y$ admet une variance et

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

### 2.c Bilinéarité de la covariance

**Proposition 31.17.—** Propriétés de la covariance
Soient $X$, $Y$, $Z$ des v.a.r. discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
2. Pour tous réels $a$ et $b$, $\mathrm{Cov}(X, aY + bZ) = a\mathrm{Cov}(X,Y) + b\mathrm{Cov}(X,Z)$.

**Démonstration** ▽
La première assertion est triviale et découle immédiatement de la définition de la covariance. Pour la deuxième, utilisons la Formule de Huygens pour la covariance, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, aY+bZ) &= E\big(X\,(aY+bZ)\big) - E(X)E\big(aY+bZ\big) \\ &= aE(XY) + bE(XZ) - aE(X)E(Y) - bE(X)E(Z) \\ &= a\big(E(XY) - E(X)E(Y)Z\big) + b\big(E(XZ) - E(X)E(Z)\big) \\ &= a\mathrm{Cov}(X,Y) + b\mathrm{Cov}(X,Z). \end{aligned}$$

▲

# III Vecteurs aléatoires

Les notions étudiées pour un couple de variables aléatoires se généralisent aux suites finies de variables aléatoires. On s'intéresse dans cette partie du chapitre à un $n$-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, où $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.

**Exemple 2 :** on effectue l'expérience $e$ suivante : on joue à "pile ou face" avec une pièce non truquée.

On associe à cette expérience élémentaire $e$ une v.a.r. $X : \{Pile,\ Face\} \to \{0,1\}$ en posant $X(Pile) = 1$, $X(Face) = 0$.
On sait bien que $X$ suit la loi de Bernouilli de paramètre $1/2$ :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, 1/2)$$

On répète $n$ fois cette expérience $e$ de façon indépendante les unes des autres.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit une variable aléatoire de Bernouilli correspondant au $k^{\text{ième}}$ lancer :

— $X_k = 1$ si on a obtenu $Pile$ au $k^{\text{ième}}$ lancer,

— $X_k = 0$ si on a obtenu $Face$ au $k^{\text{ième}}$ lancer.

Alors, l'application $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ définie sur $\Omega$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega) = \big(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)\big),$$

est un vecteur aléatoire.

## 1 Loi conjointe de $X_1, \dots, X_n$, lois marginales

**Définition :** *On appelle **loi de probabilité conjointe** de $X_1, X_2, \dots, X_n$ la donnée pour tout $n$-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ de valeurs possibles pour $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la probabilité*

$$P\Big([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\Big)$$

*Les lois de $X_1, \dots, X_n$ s'appellent les **lois marginales** du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$.*

**Exercice :** Déterminez la loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ de l'**Exemple 2**.

## 2 Indépendance de $n$ variables aléatoires

**Définition :** *On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :*

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\Big) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$$

**En pratique :** les variables aléatoires correspondant aux résultats d'expériences indépendantes sont mutuellement indépendantes.

**Exemple :** dans l'**Exemple 2**, l'énoncé précise que les expériences sont conduites de façon indépendante les unes des autres. Ceci traduit précisément le fait que les variables $X_1, \dots, X_n$ associées aux résultats de ces expériences sont mutuellement indépendantes.

**Remarque :** **Si** $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, **alors** toute sous-famille l'est aussi.

## 3 Somme de $n$ variables aléatoires

Etant donné un $n$-uplet $X_1, X_2, \dots, X_n$ de variables aléatoires, on s'intéresse à la nouvelle variable aléatoire

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

De telles sommes fournissent des exemples importants de variables aléatoires. Ainsi, $S$ peut représenter

- le nombre de succès en $n$ tentatives ;
- le gain remporté par un joueur en $n$ manches ;
- ou bien encore, le temps d'attente du $n^{\text{ième}}$ succès.

Dans le cadre de l'**Exemple 2**, les $X_k$ sont des variables de BERNOUILLI qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. Par conséquent, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est égal au nombre d'occurrences de 1 dans la liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Il s'agit donc du nombre de succès obtenus en $n$ tentatives indépendantes à "pile ou face".

### 3.a Moments d'une somme

A partir des **Théorèmes 32.10** et **32.15**, on démontre aisément par récurrence le

**Théorème 31.18.—** Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des v.a.r. discrètes sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où $n$ est un entier supérieur ou égal à 2. Alors sous réserve d'absolue convergence des séries :

$$\begin{aligned} \bullet\ E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ \bullet\ V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

**Remarque :** Combinée au **Corollaire ??**, la première propriété montre que plus généralement

$$\boxed{E\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E(X_i).}$$

Comme la covariance de deux v.a.r. indépendantes est nulle, il s'ensuit iimmédiatement que :

**Corollaire 31.19.—** Si de plus les variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

**Exercice :** Calculez l'espérance et la variance de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, où les $X_i$ sont définies dans l'**Exemple 2**.

### 3.b Exemples de sommes

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques exemples de lois de sommes

$$S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r,$$

lorsque les $X_i$ sont des variables aléatoires **mutuellement** indépendantes qui suivent des lois usuelles.
Dans les démonstrations, nous utiliserons le fait que :

**Lemme 31.20.—** Si $X_1, \ldots, X_{r+1}$ sont des variables aléatoires à valeurs entières mutuellement indépendantes alors $S_r = X_1 + \cdots + X_r$ et $X_{r+1}$ sont indépendantes.

**Démonstration** $\triangledown$
En effet, si $s \in \mathbf{N}$, nous avons (cf la **Proposition** 32.7 et son **Corollaire** ) :

$$[S_r = s] = \bigcup_{i_1 + \cdots + i_r = s} [X_1 = i_1] \cap \cdots \cap [X_r = i_r]$$

Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$, j'en déduis que pour tout $t \in \mathbf{N}$

$$[S_r = s] \cap [X_{r+1} = t] = \bigcup_{i_1 + \cdots + i_r = s} [X_1 = i_1] \cap \cdots \cap [X_r = i_r] \cap [X_{r+1} = t]$$

Par additivité finie de la probabilité $P$, il en résulte successivement que

$$P\big([S_r = s] \cap [X_{r+1} = t]\big) = \sum_{i_1 + \cdots + i_r = s} P\big([X_1 = i_1] \cap \cdots \cap [X_r = i_r] \cap [X_{r+1} = t]\big)$$

puis en valorisant le fait que les $X_k$ sont mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned} P\big([S_r = s] \cap [X_{r+1} = t]\big) &= \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} P[X_1 = i_1] \times \cdots \times P[X_r = i_r] \times P[X_{r+1} = t] \\ &= P[X_{r+1} = t] \times \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} P[X_1 = i_1] \times \cdots \times P[X_r = i_r] \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_r=s} P[X_1 = i_1] \times \cdots \times P[X_r = i_r] = P[S_r = s]$, nous avons prouvé finalement que pour tout $(s,t) \in \mathbf{N}^2$,

$$P\big([S_r = s] \cap [X_{r+1} = t]\big) = P[S_r = s] \times P[X_{r+1} = t].$$

▲

**Théorème 31.21.— Sommes de variables de lois de Bernouilli**
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ des v.a.r. mutuellement indépendantes sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On suppose que **les $X_k$ suivent la loi de Bernouilli** de même paramètre $p \in [0,1]$ :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(1; p)$$

Alors $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ **suit la loi binomiale** de paramètres $(r, p)$.

Commentaires : ce résultat est très intuitif, en effet pour compter le nombre de succès en $r$ tentatives, je rajoute 1 à chaque nouvelle réussite.

**Démonstration** ▽
Il suffit d'appliquer le résultat suivant avec $n_k = 1$. ▲

**Remarque :** vous pouvez retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(r; p)$ à l'aide du **Théorème** 32.18.

Plus généralement, nous avons

**Théorème 31.22.— Sommes de variables de lois binomiales**
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ des v.a.r. mutuellement indépendantes sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On suppose que $X_k$ **suit la loi binomiale** de paramètres $(n_k, p)$ :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k; p)$$

Alors $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ **suit la loi binomiale** de paramètres $(n_1 + n_2 + \cdots + n_r, p)$

Commentaires : ce résultat est très intuitif. Posons $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Pour compter le nombre de succès en $N$ tentatives, je compte le nombre de succès obtenus au cours des $n_1$ premières tentatives, je lui rajoute le nombre de succès obtenus au cours des $n_2$ suivantes , *etc...*

**Démonstration** ▽
La preuve sera par récurrence sur $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$.
**Initialisation :** lorsque $r = 2$
Considérons un couple $(X_1, X_2)$ de v.a.r. indépendantes telles que $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

- Il est clair que $(X_1 + X_2)(\Omega) = [\![0, n_1 + n_2]\!]$.
- Soit $n \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$.

Remarquons que $[X_1 + X_2 = n] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} [X_1 = k] \cap [X_2 = n - k]$, par indépendance de $X_1$ et $X_2$, il en résulte que

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 = n] &= \sum_{k=0}^{n} P[X_1 = k] \times P[X_2 = n - k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \times \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-n+k} \\ &= p^n (1-p)^{n_1+n_2-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}. \end{aligned}$$

Finalement, la formule de Van der Monde donne

$$P[X_1 + X_2 = n] = \binom{n_1 + n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n},$$

ce qui prouve que $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$.

**Hérédité :** Soit $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$ tel que la somme de $r$ variables aléatoires "binomiales" mutuellement indépendantes de paramètres $(n_k; p)$ suive une loi binomiale de paramètres $(n_1 + \cdots + n_r; p)$.
Considérons $X_1; \cdots, X_r, X_{r+1}$ des variables aléatoires "binomiales" mutuellement indépendantes de paramètres $(n_k; p)$.
Notons $S_r = X_1 + \cdots + X_r$ et$S_{r+1} = X_1 + \cdots + X_{r+1}$. Par construction, $S_{r+1} = S_r + X_{r+1}$. Or, d'après le **Lemme** précédent $X_{r+1}$ et $S_r$ sont indépendantes.
Ainsi, grâce à l'hypothèse de récurrence, $X_{r+1}$ et $S_r$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois binomiales de paramètres respectifs $(n_{r+1}; p)$ et $(n_1 + \cdots + n_r; p)$. D'après l'initialisation (cas de deux binomiales indépendantes) $S_{r+1} = S_r + X_{r+1}$ suit une loi binomiale de paramètres $(n_1 + \cdots + n_r + n_{r+1}; p)$.

**Conclusion :** par récurrence, nous avons prouvé que la somme de $r$ variables indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres $(n_k, p)$ suit la loi binomiale de paramètres $(n_1 + \cdots + n_r; p)$. ▲

**Théorème 31.23.—** Sommes de variables de lois géométriques
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$ des v.a.r. mutuellement indépendantes sur $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$. On suppose que les $X_k$ **suivent la loi géométrique** de paramètre $p \in ]0, 1[$ :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad X_k \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$$

Alors la loi de $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ est donnée par :

- $S_r(\Omega) = [\![r; +\infty[\![$
- $\forall n \in [\![r; +\infty[\![,\ P[S_r = n] = \binom{n-1}{r-1} p^r \, (1-p)^{n-r}$

Commentaires : Comme vous le savez, les $X_k$ correspondent aux temps d'attente d'un premier succès dans une suite d'expériences indépendantes de Bernouilli.
Répétons indéfiniment cette expérience de Bernouilli

- il faut attendre $X_1$ tentatives pour avoir le premier succès ;
- puis, il faut attendre $X_2$ tentatives pour avoir le prochain succès, c'est-à-dire le deuxième succès !

Ainsi, $X_1 + X_2$ représente le temps d'attente du deuxième succès.
De façon générale, $S_r = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$ est le temps d'attente du $r^{\text{ième}}$ succès.
**Vocabulaire :** On dit que $S_r$ suit la loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$.

**Démonstration** ▽
La preuve sera par récurrence sur $r \in \mathbf{N}^\star$.
**Initialisation :** lorsque $r = 1$, $S_1 = X_1$ suit la loi géométrique de paramètre $p$.

**Hérédité :** soit $r \geq 1$ tel que $S_r$ suive la loi de Pascal de paramètres $r$ et $p$.
Considérons la somme $S_{r+1}$ de $r + 1$ variables aléatoires suivant la même loi géométriqque $\mathcal{G}(p)$.
• Comme chaque $X_k$ est à valeur dans $\mathbf{N}^\star$, il est clair que $S_{r+1}$ est à valeur dans $[\![r + 1; +\infty[\![$.

• De plus, si $n \in [\![r + 1; +\infty[\![$, comme $S_{r+1} = S_r + X_{r+1}$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes, nous pouvons utiliser la **Proposition** 32.7. Il vient :

$$\begin{aligned} P[S_{r+1}=n] &= \sum_{k=1}^{n-1} P[S_r=k]\times P[X_{r+1}=n-k] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k-1}{r-1} p^r\,(1-p)^{k-r}\times p(1-p)^{n-k-1} \\ &= p^{r+1}q^{n-(r+1)} \sum_{k=1}^{n-1}\binom{k-1}{r-1} \\ &= p^{r+1}q^{n-(r+1)} \sum_{k=0}^{n-2}\binom{k}{r-1}. \end{aligned}$$

Comme [3] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{k}{r-1}=\binom{n-1}{r}$, nous obtenons $P[S_{r+1}=n]=\displaystyle\binom{n-1}{r}p^{r+1}(1-p)^{n-(r+1)}$.

**Conclusion :** La propriété est vérifiée pour $r=1$ et héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul $r\in\mathbf{N}^\star$. ▲

**Théorème 31.24.— Sommes de variables de lois de Poisson**
Soient $X_1,X_2,\dots,X_r$ des v.a.r. mutuellement indépendantes sur $\big(\Omega,\mathcal{A},P\big)$. On suppose que $X_k$ **suit la loi Poisson** de paramètre $\lambda_k$ :

$$\forall k\in[\![1,r]\!],\quad X_k\rightsquigarrow\mathcal{P}(\lambda_k)$$

Alors $S=X_1+X_2+\cdots+X_r$ **suit la loi de Poisson** de paramètres $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r$

**Démonstration** ▽
Lorsque $r=2$, cette propriété a été démontrée en ***Exercice*** au paragraphe **1.5**. Le cas général en découle aisément par récurrence. ▲

# IV Convergence et approximations

## 1 Loi faible des grands nombres

A l'aide de la fonction `RANDOM` du langage `Turbo-Pascal`, nous pouvons simuler une suite de lancers de dés non pipés et constater *empiriquement* que la **fréquence d'apparition** de la face portant le numéro 6 *tend* vers $\frac{1}{6}$. L'objet de ce paragraphe est de donner un sens rigoureux à cette convergence.

Remarquons que cette simulation revient à effectuer une suite d'expériences de Bernouilli $X_k$, mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions ( $p=1/6$ ). Nous pouvons exprimer la fréquence d'apparition du 6 au cours des $n$ premières tentatives comme la **moyenne arithmétique** de $X_1,X_2,\dots,X_n$ :

$$\tilde{X}_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}.$$

Nous allons démontrer que cette moyenne arithmétique tend –en un sens qui sera précisé– vers l'espérance : $\dfrac{1}{6}$

### 1.a Inégalité de Markov

**Théorème 31.25.— Inégalité de Markov**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance. Alors

$$\boxed{\forall x>0,\qquad P[X\geq x]\ \leq\ \frac{1}{x}\,E(X)}$$

3. cf **Chapitre 2**

**Démonstration** $\triangledown$
Soit $x > 0$ fixé. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{t\in X(\Omega)} t\,P[X=t] = \sum_{t<x} t\,P[X=t] + \sum_{t\geq x} t\,P[X=t] \\ &\geq \sum_{t\geq x} t\,P[X=t] \geq \sum_{t\geq x} x\,P[X=t] = x \sum_{t\geq x} P[X=t] \\ &\geq x\,P[X\geq x]. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à diviser les deux membres de cette dernière inégalité par $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, pour obtenir la majoration désirée.
▲

### 1.b Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Théorème 31.26.—** INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV
Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant une espérance et une variance. Alors

$$\boxed{\forall t > 0, \quad P\big([|X-E(X)| \geq t]\big) \;\leq\; \frac{1}{t^2}\,V(X)}$$

COMMENTAIRES : Nous avons introduit la variance comme mesure de la dispersion de la variable aléatoire $X$ autour de sa moyenne $E(X)$. L'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV permet en effet de **mesurer** en probabilité **l'écart à la moyenne** :
La probabilité que $X$ soit à une distance supérieure à $t$ de sa moyenne est inférieure à $\dfrac{V(X)}{t^2}$ .

**Démonstration** $\triangledown$
Appliquons l'inégalité de MARKOV à la variable aléatoire positive $(X-m_1)^2$ et avec $x = t^2$, il vient :

$$\begin{aligned} P\big([|X-m_1| \geq t]\big) &= P\big([(X-m_1)^2 > t^2]\big) \\ &\leq \frac{1}{t^2}\,E\big[(X-m_1)^2\big] = \frac{1}{t^2}\,V(X). \end{aligned}$$

▲

**Exercice :** On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. Quel nombre de lancers suffit-il pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$ ?

*Solution* $\triangledown$
*Notons $X_n$ le nombre de 6 apparus au cours des $n$ premiers lancers. Comme les lancers sont indépendants et que la probabilité à chaque lancer d'un succès vaut $1/6$, $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.*
*D'autre part, la fréquence d'apparition du 6 au cours des $n$ premiers lancers est donnée par la variable aléatoire $\dfrac{X_n}{n}$.*
*La question revient donc à trouver $n$ de sorte que $P\big(|\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{1}{6}| \geq 0,01\big) \leq 0,05$.*

*D'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, nous avons pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$,*

$$P\big(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq 0,01\big) \leq \frac{V(X_n/n)}{0,01^2} \leq 10^4\,\frac{npq}{n^2} \leq \frac{5.10^4}{36\,n}.$$

*Il suffit donc que $\dfrac{5.10^4}{36\,n} \leq 0,05$, i.e. $n \geq 27778$.* ▲

### 1.c Loi faible des grands nombres

**Théorème 31.27.—** Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ une suite infinie de v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi de BERNOUILLI $\mathcal{B}(1,p)$.
On définit pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ la moyenne arithmétique de $X_1, \ldots, X_n$ par :

$$\tilde{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors pour tout nombre $\varepsilon > 0$ strictement positif fixé, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\big|\tilde{X}_n - p\big| \geq \varepsilon\Big) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} P\Big(\big|\tilde{X}_n - p\big| < \varepsilon\Big) = 1}$$

**Vocabulaire :** On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)$ **converge en probabilité** vers une variable aléatoire réelle $X$ lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\big[|X_n - X| \geq \varepsilon\big] = 0}$$

COMMENTAIRES : autrement dit, si $(X_n)$ est une suite de v.a.r. de BERNOUILLI mutuellement indépendantes et de même paramètre $p$,

Les moyennes empiriques $\tilde{X}_n$ convergent en probabilité vers la v.a.r. constante égale à $p$.

**Démonstration** ▽
Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}^\star$ fixé. Pour majorer $P\big(|\tilde{X}_n - p| \geq \varepsilon\big)$, nous allons utiliser l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Pour cela, calculons d'abord l'espérance et la variance de $\tilde{X}_n$.
D'une part, par linéarité de l'espérance, nous avons

$$E(\tilde{X}_n) = p$$

D'autre part, comme par hypothèse les $X_i$ sont mutuellement indépendantes le **Théorème** 32.15 permet d'affirmer que

$$V(\tilde{X}_n) = \frac{1}{n^2}\, V(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{q}{np}$$

D'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, il en résulte que

$$\begin{aligned} 0 \leq P\big(|\tilde{X}_n - p| \geq \varepsilon\big) &= P\big(\big[\,|\tilde{X}_n - E(\tilde{X}_n)| \geq \varepsilon\,\big]\big) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{q}{np} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \end{aligned}$$

On conclut en invoquant le théorème de convergence par encadrement. ▲

**Exercice :** Soit $(X_n)$ de variables aléatoires de BERNOUILLI de même paramètre $p$, mutuellement indépendantes. On introduit pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$ les variables aléatoires

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}.$$

1. Déterminez la loi de $Y_n$.
2. Calculez l'espérance et la variance –si elles existent– de $T_n$.
3. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\big[|T_n - p| \geq \varepsilon\big] = 0$.

## 2 Convergence en loi

Etant donnée une suite $(X_n)$ de variables aléatoires de BERNOUILLI de même paramètre $p$ mutuellement indépendantes, nous avons vu que la suite $(\tilde{X}_n)$ des moyennes arithmétiques converge en probabilité vers 1/6. Il existe d'autres notions de convergence pour les suites de variables aléatoires. La plus simple est la notion de **convergence en loi**.

**Définition :** Convergence en loi
*Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires et $X$ une variable aléatoire, toutes définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ prenant des valeurs entières. On dit que :*

$$\boxed{\text{la suite } (X_n) \textbf{ converge en loi} \text{ vers } X \text{ si } \forall k \in \mathbf{N},\ P([X = k]) = \lim_{n\to+\infty} P[X_n = k].}$$

Commentaires : par la définition même de limite de suite de réels, cela signifie, $k \in \mathbf{N}$ étant fixé, que $P([X_n = k])$ est arbitrairement proche de la limite $P([X = k])$ pourvu que $n$ soit suffisamment grand. Ceci permet de remplacer – sous réserve que $n$ soit suffisamment grand– $P[X_n = k]$ par $P[X = k]$ avec une erreur négligeable.
La fin du chapitre présente deux exemples de convergence en loi.

### 2.a Approximation d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

**Théorème 31.28.—** Soient $(n, p) \in \mathbf{N}^2$, $(X_N)_{N\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires de lois hypergéométriques $\mathcal{H}(N, n, p)$.

$$(X_N)_{N\in\mathbf{N}} \text{ converge en loi vers une v.a.r. } X \text{ de loi binomiale } X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Commentaires : intuitivement, cette convergence en loi s'interprète de la façon suivante :

> *Une urne $\mathcal{U}$ contient $N$ boules blanches ou noires. Il y a une proportion $p$ de boules blanches et une proportion $q$ de boules noires. On effectue dans cette urne des tirages de $n$ boules. On note $X$ le nombre de boules blanches obtenues.*

**Si** les tirages se font **sans remise**, alors $X$ suit la loi hypergéométrique $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.
**Si** au contraire on effectue $n$ tirages successifs **avec remise**, le nombre de boules blanches suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Si à présent le nombre total de boules dans l'urne est très grand comparé à $n$, la probabilité en $n$ tirages successifs d'obtenir des répétitions est très faible. On peut donc considérer que les tirages sont avec remise.

**Démonstration** ▽
Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé et $k \in [\![0, n]\!]$. Par définition de la loi hypergéométrique, nous avons tout d'abord

$$P[X_N = k] = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Pour calculer la limite quand $N$ tend vers $+\infty$ de cette probabilité, nous cherchons un équivalent de $P[X_N = k]$ lorsque $N \to +\infty$.
Un polynôme en $N$ étant équivalent à son monôme dominant au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\binom{Np}{k} &= \frac{(Np)\cdot(Np-1)\cdots(Np-k+1)}{k!} \sim \frac{(Np)^k}{k!}\\
\binom{Nq}{n\text{-}k} &= \frac{(Nq)\cdot(Nq-1)\cdots(Nq-n+k+1)}{(n-k)!} \sim \frac{(Nq)^{n-k}}{(n-k!)}\\
\binom{N}{n} &= \frac{N\cdot(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} \sim \frac{N^n}{n!}
\end{aligned}$$

Par compatibilité des équivalents pour le produit, il en résulte immédiatement l'équivalence suivante :

$$P[X_N = k] \underset{N\to+\infty}{\sim} \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}.$$

En particulier, $\lim_{N\to+\infty} P[X_N = k] = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$. ▲

**En pratique :** il est avantageux de remplacer $\mathcal{H}(N, n, p)$ par la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ puisqu'il n'y a plus que deux paramètres.
On considère que l'approximation est valable lorsque $\boxed{N \geq 10\,n}$.

### 2.b Approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$

**Théorème 31.29.—** Soient $(n, \lambda) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{R}^{+\star}$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$, une suite de variables aléatoires de lois binomiales $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

$$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \text{ converge en loi vers une v.a.r. } X \text{ de loi Poisson } X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

**Démonstration** ▽
Soit $k \in \mathbf{N}$ fixé, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, un calcul analogue à celui de la preuve ci-dessous montre que

$$\binom{n}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!},$$

de sorte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$P[X_n = k] = \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Comme de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} P[X_n = k] = e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$. ▲

**En pratique :** il est avantageux de remplacer $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ puisqu'il n'y a plus qu'un seul paramètre.
On considère que l'approximation est valable lorsque

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} p & \leq & 0,1 \\ n & \geq & 30 \\ np & < & 15 \end{array}\right.}$$

**Exemple :** Lorsque $n = 30$ et $p = 0,05$, on peut approcher $P([X = 3]) = \binom{30}{3} \times p^3\, q^{27}$ par $e^{-1.5}\,\frac{1,5^3}{3!}$.

# V How To

## Séries doubles

### Comment vérifier la convergence et calculer la somme d'une série double

- Lorsque **la série est à termes positifs**.
  La sommation se fait en deux étapes à l'aide du **théorème de Fubini-Tonelli** :

**1.** *Fixez* $i \in \mathbf{N}$. Vérifiez la convergence et calculez la somme $a_{i\bullet} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$.

**2.** *Libérez* $i$ ! Vérifiez la convergence et calculez la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i\bullet}$.

**Conclusion :** la série $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j}$ converge et a pour somme : $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$.
**Nb :** Vous pouvez aussi fixer d'abord $j$ puis sommer en $j$.

- Lorsque **la série n'est pas à termes positifs**.
  Vous devez d'abord vérifier que cette série est **absolument convergente** :

**1.** vous montrez que la série $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} |a_{i,j}|$ est convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, vous appliquez le **théorème de Fubini-Tonelli**, comme ci-dessus.

**2.** puis vous calculez la somme de la série double $\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j}$ à l'aide du **théorème de Fubini**.

## Lois associées à un couple de variables aléatoires

### Comment déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$

**1.** Identifiez l'ensemble des valeurs possibles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis,

**2.** Calculez pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ la probabilité $P[X = x \text{ et } Y = y]$.

### Comment vérifier la loi du couple $(X, Y)$

L'énoncé vous donne les valeurs possibles $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ pour $X$ et pour $Y$, ainsi que les probabilités $p_{i,j} = P[X = x_i \cap Y = y_j]$. Vous devez vérifier que les $p_{i,j}$ sont positifs et surtout que

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$$

Suivant que $X$ ou $Y$ soit finie, il peut s'agir d'une somme double finie, d'une somme de séries ou bien encore d'une série double, auquel cas, vous devrez utiliser le **théorème de Fubini-Tonelli**

### Comment déterminer les lois conditionnelles de $X$ sachant $Y$

- **lorsque vous connaissez la loi conjointe de** $X$ **et** $Y$.
  Vous pouvez en déduire les lois conditionnelles de $X$ sachant $[Y = y_j]$ grâce à la définition : $P[X = x_i | Y = y_j] = \dfrac{p_{i,j}}{p_{\bullet j}}$
- **lorsque vous ne connaissez pas la loi conjointe de** $X$ **et** $Y$
  Pour calculer $P[X = x_i | Y = y_j]$,
  - vous **supposez que** $[Y = y_j]$ **soit réalisé**.
  - $P[X = x_i | Y = y_j]$ est la probabilité pour que $[X = x_i]$ se réalise.

### Comment déterminer les lois marginales

- **lorsque vous connaissez la loi conjointe de $X$ et $Y$.**
  Si $X$ et $Y$ sont finies, leur loi conjointe est donnée dans un tableau : il s'agit de calculer les sommes en lignes et en colonnes. Plus généralement, il s'agit d'un calcul de somme de séries convergentes. Par exemple, la loi marginale de $X$ est donnée par :

$$\forall i \in I, \quad p_{i\bullet} = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

- **lorsque vous ne connaissez pas la loi conjointe de $X$ et $Y$.**
  L'énoncé vous guide parfois dans la démarche suivante :

1. déterminez la loi de $Y$ (en général une loi usuelle)
2. déterminez la loi conditionnelle de $X$ sachant $Y$( voir page précédente)
3. déterminez la loi de $X$. A ce stade, vous utilisez la **Formule des probabilités totales** pour le système complet d'événements ($[Y = y_j]$), vous obtenez :

$$P[X = x] = \sum_{j \in J} P[Y = y_j] \times P[X = x_i | Y = y_j].$$

## Moments

### Comment calculer l'espérance d'une variable aléatoire $Z$

- Par définition, vous devez vérifier l'**absolue convergence** et calculer la somme de la série $\sum_{i \in I} z_i P[Z = z_i]$
- Si $Z = aX + bY$, vous utilisez la **linéarité de l'espérance** :
  Si $X$ et $Y$ admettent une espérance, alors $Z$ admet une espérance et

$$E(Z) = aE(X) + bE(Y).$$

- Si $Z = g(X, Y)$, vous utilisez le **Théorème de transfert** :
  $Z$ a une espérance *ssi* la série double $\sum_{(i,j)} g(x_i; y_j)\, p_{i,j}$ est absolument convergente.
  Si tel est le cas, $E(Z) = \displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i; y_j)\, p_{i,j}.$

### Comment calculer la variance d'une variable aléatoire $Z$

- D'après la **formule de Huygens**, le calcul de la variance d'une variable se ramène –à vérifier l'existence et– à calculer l'espérance de $Z$ et $Z^2$. En ce cas

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2.$$

- Si $Z = aX + bY$, où $X$ et $Y$ admettent une variance. $Z$ admet une variance et

$$V(Z) = a^2 V(Z) + 2a\, b \operatorname{Cov}(X, Y) + b^2 V(Y).$$

  En particulier, si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$.

### Comment calculer la covariance d'un couple $(X, Y)$

- D'après la **formule de Huygens**, le calcul de la covariance de $(X, Y)$ se ramène –à vérifier l'existence et– à calculer l'espérance de $X$ , $Y$ et $XY$. En ce cas

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
- Vous pouvez aussi utiliser la bilinéarité de la covariance :

$$\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z)$$