Chapitre 20

Espaces vectoriels

Sommaire

OBJECTIFS

A la fin du chapitre, vous devez connaître les structures des espaces vectoriels classiques, ainsi que leurs sous-espaces vectoriels célèbres. En outre, vous devez savoir démontrer que

- ▷ une partie F d'un $\mathbf{K}$-ev est un s.e.v. de E
- ▷ deux sous-espaces de E sont supplémentaires,
- ▷ une famille finie de vecteurs de E est libre, génératrice, et le cas échéant une base de E.

Introduction

Nous avons déjà rencontré de nombreux ensembles ***stables par combinaison linéaire*** :

- l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites *de nombres réels ainsi que l'ensemble* $\mathscr{E}_0$ *des suites convergentes de limite nulle ou* $\mathscr{E}_{a,b}$ *des suites doublement récurrentes linéaires,*
- l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, *à coefficients dans* $\mathbf{K}$
- l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes *à coefficients dans* $\mathbf{K}$*,*
- l'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ des fonctions *définies sur un intervalle, l'ensemble* $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ *des fonctions continues sur un intervalle,*
- l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène,
- l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène, *etc...*

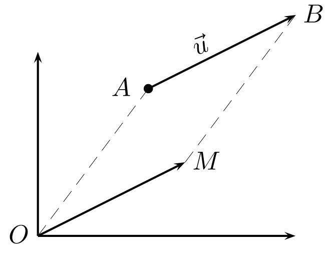
En fait, chaque théorème du cours intitulé **Opérations algébriques** montre en particulier la stabilité des objets considérés par combinaison linéaire !
Le nombre important d'exemples issus de l'algèbre ou de l'analyse justifie l'étude de ces espaces *stables par combinaison linéaire* de façon générale –donc nécessairement plus abstraite. Ces ensembles sont appelés les **espaces vectoriels**.

Rappels de géométrie plane

Le nom de ces espaces provient de la géométrie plane ou dans l'espace. Avant de commencer l'étude des espaces vectoriels, faisons quelques rappels de géométrie.

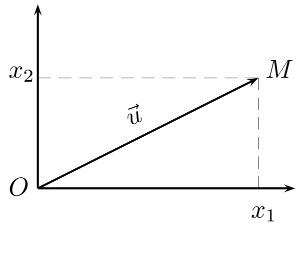
Deux couples (A, B) et (C, D) de points du plan $\mathcal{P}$ sont dits **équipollents** si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. L'ensemble des couples (C, D) équipollents au couple (A, B) est appelé **vecteur** $\overrightarrow{AB}$. En clair, un vecteur non nul du plan euclidien correspond à la donnée d'une direction, d'un sens et d'une longueur.

Comme un vecteur $\vec{u}$ représentant le bipoint (A, B) ne dépend pas d'un *point base* particulier, il existe un unique point $M \in \mathcal{P}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

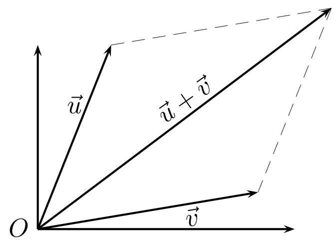


Par conséquent, le vecteur $\vec{u}$ est uniquement et entièrement déterminé par la donnée des coordonnées du point M. Autrement dit

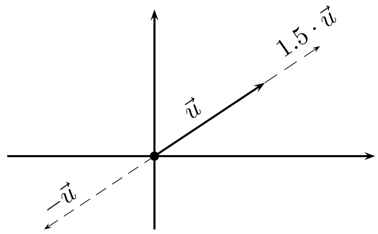
$$\boxed{\text{L'ensemble des vecteurs du plan est en bijection avec } \mathbf{R}^2.}$$



Le calcul vectoriel comme vous l'avez déjà pratiqué est essentiellement basé sur les opérations suivantes :
La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ déterminé par la *célèbre* règle du parallélogramme.



La **multiplication d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel** λ est le vecteur homothétique $\lambda \cdot \vec{u}$ de même direction que $\vec{u}$ de longueur $|\lambda|$ fois celle de $\vec{u}$ et pour sens celui de $\vec{u}$ si λ est positif, et le sens contraire si λ est négatif.



On vérifie immédiatement que ces deux opérations satisfont les propriétés suivantes :

- **Propriétés de l'addition des vecteurs du plan**
  - Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
  - Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$.
  - Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est **élément neutre** pour l'addition :
    pour tout vecteur $\vec{u}$, $\quad \vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$.
  - tout vecteur $\vec{u}$ possède un vecteur **opposé**, noté $-\vec{u}$ qui vérifie $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$
- **Propriétés de la multiplication externe**
  - pour tous réels λ, μ et tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda.\mu) \cdot \vec{u}$
  - pour tous réels λ, μ et tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad (\lambda+\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
  - pour tout réel $\lambda \in \mathbf{R}$ et tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad \lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
  - pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Généralisation

Ces opérations se traduisent très simplement en coordonnées : si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont deux vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbf{R}$ un scalaire, alors

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \vec{u} = (\lambda.u_1, \lambda.u_2)}$$

Le modèle géométrique présenté ci-dessus, c'est-à-dire l'identification de $\mathbf{R}^2$ comme ensemble des vecteurs du plan peut être appliqué à $\mathbf{R}^3$ vu comme ensemble des vecteurs de l'espace.
Lorsque $n \geq 4$, on munit $\mathbf{R}^n$ de l'**addition** *coordonnée par coordonnée*

$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)}$$

et de la **multiplication externe** définie par :

$$\boxed{\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_n)}$$

Dans ce cas, il est impossible de *dessiner* un vecteur de $\mathbf{R}^n$, toutefois, on peut encore l' *imaginer*[1]. Pour cette raison, les n-uplets de réels seront encore appelés des **vecteurs** de $\mathbf{R}^n$ et notés

$$\boxed{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Cette interprétation géométrique guidera notre intuition au travers de ce chapitre abstrait.

[1] Par exemple, nous vivons dans un espace qui compte 3 dimensions spatiales et une dimension temporelle. Ainsi, un événement de notre espace est repéré par 4 coordonnées : trois précisent *le lieu*, la dernière indique *à quel moment il a eu lieu*

I Espaces vectoriels sur K

Dans tout le chapitre **K** désigne **R** ou **C**.

1 Structure algébrique

Définition : *Un triplet $(E, +, \cdot)$ est appelé un **espace vectoriel** sur* **K** *si E est un ensemble muni d'une addition interne, notée $+$ et d'une multiplication externe notée $\cdot$ telles que :*

- **L'addition** $+ : E \times E \to E$ *vérifie les propriétés suivantes* [2] *:*
  - **A1.—** ***associativité*** *:* $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3$, $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.
  - **A2.—** ***commutativité*** *:* $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
  - **A3.—** *E possède un **élément neutre** pour $+$, noté $\vec{0}_E$:* $\forall \vec{x} \in E$, $\vec{x} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{x} = \vec{x}$.
  - **A4.—** *tout élément $\vec{x}$ de E possède un **opposé**, noté $-\vec{x}$ qui vérifie* $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}_E$
- **La multiplication** $\cdot :$ **K** $\times E \to E$ *vérifie les propriétés suivantes :*
  - **M1.—** ***associativité mixte*** *:* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall \vec{x} \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda.\mu) \cdot \vec{x}$
  - **M2.—** ***distributivité à droite*** *:* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall \vec{x} \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
  - **M3.—** ***distributivité à gauche*** *:* $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
  - **M4.—** ***action de*** $1\cdot$ *:* $\forall \vec{x} \in E$, $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Vocabulaire : *On dit aussi que E est un "**K-espace vectoriel**" (et on note* **K***-e.v) à la place de "espace vectoriel sur* **K***".*
*Les éléments de E, notés dans ce cours avec une flèche, sont appelés les **vecteurs** de E. Les nombres réels ou complexes sont appelés en ce contexte des **scalaires**. $\vec{0}_E$ est le **vecteur nul** de E.*

Notation : *Je note $\cdot$ la multiplication externe et . la multiplication des scalaires.*

Remarque : Comme vous pouvez le remarquer, un espace vectoriel n'est **jamais vide** puisqu'il doit nécessairement contenir un élément neutre pour $+$.

1.a Exemple fondamental : structure d'espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$

- **Addition dans $\mathbf{K}^n$**
  Etant donnés deux n-uplets de scalaires $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on définit leur somme par
  $$\boxed{\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)}$$
  On vérifie aisément que cette addition est associative et commutative, qu'elle possède un élément neutre :
  $$\boxed{\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)}$$
  et que tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ possède un opposé :
  $$\boxed{-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)}$$
- **Multiplication externe**
  Etant donnés un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit le produit $\lambda \cdot \vec{x}$ par :
  $$\boxed{\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \dots, \lambda.x_n)}$$

Théorème.— Muni des deux lois de composition définies ci-dessus,
$$\boxed{(\mathbf{K}^n, +, \cdot) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

Remarque : En particulier, lorsque $n = 1$, $\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}$ est un espace vectoriel sur **K**.

[2] en version courte $(E, +)$ est un groupe commutatif

2 Calculs dans un espace vectoriel

La proposition suivante précise les règles de calculs dans un espace vectoriel, notamment les règles pour la multiplication par 0 d'un vecteur $\vec{x}$ et de la multiplication par λ du vecteur nul $\vec{0}_E$. Les résultats ne sont guère surprenants et sont conformes –dans ce cadre plus général– à ce qui se passe dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$:

Proposition 20.1.— Règles de calculs dans un espace vectoriel
Soit $(E,+,\cdot)$ un **K**-e.v. Pour tous couples $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$ et $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$:

1.	$\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$ et $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$.	**3.**	$\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}\iff\big(\lambda=0\ \text{ ou }\ \vec{x}=\vec{0}\big)$.
2.	$(-\lambda)\cdot\vec{x}=-(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot(-\vec{x})$.	**4.**	$\lambda\cdot(\vec{x}-\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{y}$.

Démonstration $\triangledown$

1. Utilisant la définition du neutre et les propriétés de distributivité, j'obtiens
D'une part, $\lambda\cdot\vec{0}=\lambda\cdot(\vec{0}+\vec{0})=\lambda\cdot\vec{0}+\lambda\cdot\vec{0}$.
D'où je tire en ajoutant l'opposé de $\lambda\cdot\vec{0}$ aux deux membres de cette égalité $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$.
Et d'autre part, $0\cdot\vec{x}=(0+0)\cdot\vec{x}=0\cdot\vec{x}+0\cdot\vec{x}$.
D'où je tire en ajoutant l'opposé de $0\cdot\vec{x}$ aux deux membres de cette égalité $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$.

2. Utilisant la distributivité de la multiplication externe sur l'addition des vecteurs, et la propriété 1., j'obtiens :
d'une part $\lambda\cdot\vec{x}+(-\lambda)\cdot\vec{x}=(\lambda-\lambda)\cdot\vec{x}=0\cdot\vec{x}=\vec{0}$.
Il en résulte que $(-\lambda)\cdot\vec{x}$ est bien l'opposé de $\lambda\cdot\vec{x}$.
et d'autre part $\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot(-\vec{x})=\lambda\cdot\big(\vec{x}+(-\vec{x})\big)=\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$.
Il en résulte que $\lambda\cdot(-\vec{x})$ est bien l'opposé de $\lambda\cdot\vec{x}$. D'où $-\big(\lambda\cdot\vec{x}\big)=(-\lambda)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(-\vec{x})$.

3.
$\boxed{\Leftarrow}$ déjà prouvé !
$\boxed{\Rightarrow}$ supposons que $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}$. Montrons que $\lambda=0$ ou $\vec{x}=\vec{0}$.
Si $\lambda=0$, il n'y a rien à faire !
Supposons que $\lambda\neq0$. En ce cas, multiplions l'égalité supposée par λ^{-1}. Par associativité mixte, il vient :

$$0 \;=\; \lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot\vec{x})=(\lambda.\lambda^{-1})\cdot\vec{x}=1\cdot\vec{x}=\vec{x}.$$

4. il s'agit là d'un simple calcul utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(\vec{x}-\vec{y}) &= \lambda\cdot\big(\vec{x}+(-\vec{y})\big)=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot(-\vec{y})\\ &= \lambda\cdot\vec{x}-\lambda\cdot\vec{y}.\end{aligned}$$

▲

Muni de ces deux lois, on n'a guère d'autres possibilités dans un espace vectoriel que de faire des :

Définition : Combinaisons linéaires
*Soient $(E,+,\cdot)$ un **K**-e.v, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ des vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, tout vecteur $\vec{x}$ de la forme :*

$$\boxed{\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\cdot\vec{x}_n}$$

où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n$.
*Plus généralement, étant donnée une partie A de E, on appelle **combinaison linéaire d'éléments de** A tout vecteur $\vec{x}$ de la forme :*

$$\boxed{\vec{x}=\sum\nolimits_{i\in I}\lambda_i\cdot\vec{x}_i},$$

où $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est une famille finie d'éléments de A.

Commentaires : lorsqu'on parle de combinaison linéaire, on entend **toujours** combinaison linéaire **finie**.

Exemple : comme nous allons rapidement le voir, $\mathbf{K}[X]$ est un **K**-e.v. Dans ce contexte, tout polynôme peut s'écrire comme combinaison linéaire –sous-entendue finie– d'éléments de $A=\{X^k,k\in\mathbf{N}\}$

Exercice : On se place dans $E=\mathbf{R}^4$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies dans l'**Exemple fondamental**.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,2,-1)$, $\vec{u}_3 = (2,-1,1,0)$ et $\vec{u}_4 = (2,0,2,-1)$. Explicitez le vecteur $\vec{u} = 3\cdot\vec{u}_1 - 5\cdot\vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \vec{u}_4$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, un couple de paramètres réels. Ecrivez sous la forme d'une combinaison linéaire de coefficients a et b, le vecteur $\vec{u} = (a, a+3b, 2a-b, b-a)$.

Solution $\triangledown$

1.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= 3\cdot(1,1,0,0) - 5\cdot(0,1,2,-1) + (2,-1,1,0) - (2,0,2,-1)\\
&= (3,3,0,0) + (0,-5,-10,5) + (2,-1,1,0) + (-2,0,-2,1)\\
&= \big(3+0+2-2, 3-5-1+0, 0-10+1-2, 0+5+0+1\big)\\
&= (3,-3,-11,6)
\end{aligned}$$

2. Procédons à rebours :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= (a, a+3b, 2a-b, b-a) = (a,a,2a,-a) + (0,3b,-b,b)\\
&= a\cdot(1,1,2,-1) + b\cdot(0,3,-1,1).
\end{aligned}$$

$\blacktriangle$

Proposition 20.2.— Règles de calcul pour les combinaisons linéaires
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-e.v, $\vec{x}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des vecteurs de E et $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires. Alors

$$\blacksquare\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\cdot \vec{x} \qquad \blacksquare\ \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \vec{x}_i = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i\right)$$

Démonstration $\triangledown$
lorsque $n = 2$, il s'agit simplement des propriétés **M2** et **M3**. Le cas général s'en déduit par récurrence immédiate. $\blacktriangle$

3 Espaces vectoriels de référence

Ce paragraphe ne contient aucun résultat nouveau, j'ai rassemblé ci-dessous les principaux espaces vectoriels que nous avons déjà étudiés cette année. Vous devez *connaître parfaitement les structures* algébriques de ces exemples de référence, c'est-à-dire :

- l'addition
- la multiplication externe
- l'égalité de deux éléments

Nb : sauf mention expresse du contraire, les exemples d'espaces vectoriels introduits dans ce paragraphe seront toujours munis des opérations définies ci-dessus. En conséquence, je ne note pas les lois + et $\cdot$. Par exemple, l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ désigne bien entendu le triplet $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$.

3.a Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

- **Addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.**
  Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La somme $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est la matrice définie par
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$
  Les propriétés de l'addition des matrices sont résumées dans le **Théorème** 19.1.
- **Multiplication externe**
  Etant donnés une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit la matrice $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda \cdot A)_{i,j} = \lambda . a_{i,j}$$
  Les propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire sont résumées dans le **Théorème** 19.2.

Proposition.— Muni des deux lois de composition définies ci-dessus,

$$\boxed{(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}),+,\cdot) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

3.b Structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{K}[X]$

- **Addition dans $\mathbf{K}[X]$**
  Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\ X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k\ X^k$ deux polynômes à coefficients dans **K**. On définit le **polynôme somme** $P+Q$ par :

$$P+Q = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k+b_k)\ X^k$$

  Les propriétés de l'addition des polynômes sont résumées dans la **Proposition** 15.1.
- **Multiplication externe**
  Etant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\ X^k$ à coefficients dans **K** et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit le polynôme $\lambda \cdot P$ par :

$$\lambda \cdot P = \sum_{k=0}^{n} \lambda\ a_k\ X^k$$

  Les propriétés de la multiplication d'un polynôme par un scalaire sont résumées dans la **Proposition** 15.8.

Proposition.— Muni des deux lois de composition définies ci-dessus,

$$\boxed{(\mathbf{K}[X],+,\cdot) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

3.c Structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

- **Addition dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$**
  Soient $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites numériques. La suite **somme** $u+v$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, (u+v)_n = u_n + v_n$$

- **Multiplication externe**
  Etant donnés une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$, la suite $\lambda \cdot u$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (\lambda \cdot u)_n = \lambda.u_n$$

  Les propriétés de la multiplication d'une suite par un scalaire sont résumées dans la **Proposition** 7.11.

Proposition.— Muni des deux lois de composition définies ci-dessus,

$$\boxed{(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},+,\cdot) \text{ est un } \mathbf{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

3.d Structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$

- **Addition dans $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$**
  Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de **R**, on définit leur somme par :

$$f+g\ :\ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

  L'addition de deux fonctions est associative (*resp.* commutative) car l'addition dans **K** l'est. De plus, la fonction constante égale à 0 est élément neutre pour l'addition. Toute fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbf{K})$ possède une fonction opposée, notée $-f$ qui est définie par

$$\forall x \in I, \quad (-f)(x) = -f(x)$$

- **Multiplication externe**
  Etant donnés une fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{K})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit la fonction $\lambda \cdot f$ par :

$$\begin{array}{rcccl} \lambda \cdot f & : & I & \to & \mathbf{K} \\ & & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Proposition.— Muni des deux lois de composition définies ci-dessus,

$$\boxed{\left(\mathscr{F}(I, \mathbf{K}), +, \cdot\right) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

4 Construction d'espaces vectoriels

Deux constructions générales d'espaces vectoriels : l'espace vectoriel produit et l'ensemble des applications à valeurs dans un espace vectoriel.

4.a Produit d'espaces vectoriels

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps de scalaires $\mathbf{K}$. Le produit cartésien est naturellement muni d'une addition et d'une multiplication externe " *coordonnées par coordonnées*" :

- **Addition dans** $E \times F$
  Soient $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $\vec{x}_2, \vec{y}_2)$ deux éléments de $E \times F$. On définit leur somme par :

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1) + (\vec{x}_2, \vec{y}_2) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 + \vec{y}_2)$$

  Comme l'addition dans E et dans F le sont, l'addition dans $E \times F$ ainsi définie est associative et commutative. De plus, le couple $(\vec{0}_E, \vec{0}_F)$ est élément neutre pour l'addition dans $E \times F$.
  Enfin, l'opposé d'un élément $(\vec{x}, \vec{y})$ de $E \times F$ est donné par $-(\vec{x}, \vec{y}) = (-\vec{x}, -\vec{y})$.
- **Multiplication externe dans** $E \times F$
  Soient $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit le vecteur $\lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y})$ par

$$\lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda \cdot \vec{x}, \lambda \cdot \vec{y})$$

  On déduit aisément des propriétés des lois externes sur E et F les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \big((\vec{x}_1, \vec{y}_1) + (\vec{x}_2, \vec{y}_2)\big) & = & \lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{y}_1) + \lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{y}_1)(\vec{x}_2, \vec{y}_2) \\ (\lambda + \mu) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) & = & \lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) + \mu \cdot (\vec{x}, \vec{y}) \\ (\lambda . \mu) \cdot (\vec{x}, \vec{y}) & = & \lambda \cdot \big(\mu \cdot (\vec{x}, \vec{y})\big) \\ 1 \cdot (\vec{x}, \vec{y}) & = & (\vec{x}, \vec{y}) \end{array}$$

Ainsi,

Proposition 20.3.— Muni des deux lois ci-dessus,

$$\boxed{E \times F \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbf{K}}$$

Remarque : Cette construction se généralise à un produit fini d'espaces vectoriels sur un même corps de base.

Exemple : Soit $n \in \mathbf{N}$, alors $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

4.b Applications à valeurs vectorielles

Soit X un ensemble quelconque et F un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. L'ensemble $\mathscr{F}(X, F)$ des applications de X à valeurs dans F est naturellement muni d'une addition et d'une multiplication externe.

- **Addition dans $\mathscr{F}(X,F)$**
  Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble quelconque X, à valeurs dans F, on définit leur somme par :
$$f+g\ :\ \begin{array}{rcl} X & \to & F \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$
  L'addition de deux fonctions est associative (*resp.* commutative) car l'addition des vecteurs de F l'est. De plus, la fonction constante égale à 0 est élément neutre pour l'addition. Toute fonction $f \in \mathscr{F}(X,F)$ possède une fonction opposée, notée $-f$ qui est définie par
$$\forall x \in, \quad (-f)(x) = -f(x)$$
- **Multiplication externe**
  Etant donnés une fonction $f \in \mathscr{F}(X,F)$ et un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit la fonction $\lambda \cdot f$ par :
$$\lambda \cdot f\ :\ \begin{array}{rcl} X & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Proposition 20.4.— Soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Muni des deux lois ci-dessus,

$$\boxed{\mathscr{F}(X,F) \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbf{K}}$$

Exemple : nous retrouvons comme cas particulier, le fait que $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

II Sous-espaces vectoriels

1 Définition et caractérisation

Définition : *Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie* ***non vide*** *de E.*
On dit que F est un ***sous-espace vectoriel***[3] *de E si, muni des lois de E, F est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.*
Plus précisément, F est un ***sous-espace vectoriel*** *de E si les lois induites par celles de E :*
$$+ : F \times F \to F \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbf{K} \times F \to F$$
vérifient les huit propriétés des espaces vectoriels.

Exemple : $\{\vec{0}_E\}$ et E lui-même sont des sous-espaces vectoriels de E. On les appelle les **sous-espaces vectoriels triviaux** de E.

Remarque : un sous-espace vectoriel F est un espace vectoriel à part entière. En conséquence,

- F est non vide car il doit contenir l'élément neutre $\vec{0}_F = \vec{0}_E$.
- F est stable par les lois de E.

En fait, ces conditions sont suffisantes, c'est la :

Théorème 20.5.— Caractérisation des sous-espaces vectoriels
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie de E.

$$\boxed{F \text{ est un s.e.v. de } E \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{array}{l} \blacksquare\ F \neq \emptyset \\ \blacksquare\ \forall (\vec{x},\vec{y}) \in F^2,\ \vec{x}+\vec{y} \in F \\ \blacksquare\ \forall (\lambda,\vec{x}) \in \mathbf{K} \times F,\ \lambda \cdot \vec{x} \in F. \end{array}}$$

[3] s.e.v. en abrégé

Démonstration $\triangledown$
Comme nous l'avons remarqué les trois conditions sont nécessaires pour que F soit un sous-espace vectoriel de E. Montrons qu'elles sont suffisantes : il s'agit donc de vérifier chacune des huit propriétés des espaces vectoriels.

- **A1, A2, M1, M2, M3** et **M4** étant valables pour tout $(\vec{x}, \vec{y})$ de E^2 sont *a fortiori* vérifiées pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$.
- **A3** : l'addition induite par celle de E sur F possède un élément neutre.
  Comme F est non vide, il existe un élément $\vec{x}$ de F. Par hypothèse, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot \vec{x}$ est encore élément de F. En particulier $0 \cdot \vec{x} \in F$. Or, d'après les règles de calcul dans l'espace vectoriel E, $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$. Par suite, $\vec{0}_E$ est élément de F.
  Comme pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} + \vec{0}_E = \vec{x}$, en particulier pour tout $\vec{y} \in F$, $\vec{y} + \vec{0}_E = \vec{y}$. Ceci prouve que $\vec{0}_E$ est élément de F et c'est l'élément neutre pour l'addition dans F. En clair :
  $$\vec{0}_F = \vec{0}_E.$$
- **A4** : tout élément de F possède un opposé dans F :
  Soit $\vec{y} \in F$. $\vec{y}$ possède un opposé dans E, noté $-\vec{y}$. D'après les règles de calculs dans E, $-\vec{y} = (-1) \cdot \vec{y}$. Par hypothèse, pour tout scalaire λ, $\lambda \cdot \vec{y} \in F$. En particulier $-\vec{y} \in F$. Enfin, d'après la démonstration de **A3**, $\vec{y} + (-\vec{y}) = \vec{0}_E = \vec{0}_F$. Ce qui prouve que $-\vec{y} \in F$ est l'opposé de $\vec{y}$ dans F.

$\blacktriangle$

On peut encore reformuler ce théorème en combinant les deux dernières conditions :

Corollaire 20.6.— Caractérisation des sous-espaces vectoriels
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie de E.

F est un s.e.v. de E	*si et seulement si*	■ $F \neq \emptyset$ ■ $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F$

Commentaires : ces caractérisations des sous-espaces vectoriels sont incontournables puisqu'elle permettent de ramener à deux ou trois[4] le nombre de propriétés à vérifier pour démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. !

En pratique : Pour démontrer qu'une partie F est un sous-espace vectoriel : vous utilisez **toujours** une caractérisation (**Théorème** 20.5, le **Corollaire** 20.6 ou une autre formulation équivalente) :

- vous prouvez que F est non vide. Il est souvent facile de vérifier que le vecteur nul $\vec{0}_E$ est élément de F.
- vous montrez que F est stable par combinaison linéaire.

Remarque : pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. ☺

Démonstration $\triangledown$
Les deux conditions sont évidemment nécessaires. En appliquant la deuxième propriété, avec $\lambda = \mu = 1$ d'une part et $\mu = 0$, $\vec{y} = \vec{0}_E$ d'autre part, remarquons que nous obtenons précisément les deux assertions du **Théorème** 20.5. Ceci prouve que ces conditions sont suffisantes. $\blacktriangle$

Exercice : Droites vectorielles

1. Soient $\vec{u}$ un vecteur du plan $\mathbf{R}^2$ et $F = \{\vec{v} \mid \exists \lambda \in \mathbf{R};\ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}\}$.
   Démontrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.
   F est appelé **droite vectorielle engendrée par** $\vec{u}$.
2. Soit D une droite de $\mathbf{R}^2$ ne passant pas par l'origine. D est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$?

Solution $\triangledown$

1. *Montrons que $F = \{\vec{v} \mid \exists \lambda \in \mathbf{R};\ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Nous utilisons pour ce faire le* **Corollaire** *20.6 :*

[4] plutôt que huit

- *le vecteur nul de* $\mathbf{R}^2$ *appartient à* F *car* $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.
- *Soit* $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in F^2$ *un couple de vecteurs de* F*, alors par définition de* F*, il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$ *tels que*

$$\begin{array}{r\|lcl} \mu_1 \times & \vec{v}_1 & = & \lambda_1 \cdot \vec{u} \\ \mu_2 \times & \vec{v}_2 & = & \lambda_2 \cdot \vec{u} \end{array}$$

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ *un couple de scalaires, les règles de calcul dans* $\mathbf{R}^2$*, donnent :*

$$\begin{aligned} \mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \mu_2 \cdot \vec{v}_2 &= \mu_1 \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{u}) + \mu_2 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{u}) \\ &= (\mu_1 \lambda_1) \cdot \vec{u} + (\mu_2 \lambda_2) \cdot \vec{u} \\ &= (\underbrace{\mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2}_{\lambda \in \mathbf{R}}) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_1 \cdot \vec{v}_1 + \mu_2 \cdot \vec{v}_2$ *est colinéaire à* $\vec{u}$ *: il appartient donc à* F.

2. *Tout sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^2$ *contient le vecteur nul. Une droite ne passant pas par l'origine ne peut donc être un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{R}^2$.

▲

2 Exemples de sous-espaces vectoriels

Ce paragraphe ne contient aucun résultat nouveau, j'ai collecté quelques exemples *célèbres* de sous-espaces vectoriels que nous avons déjà rencontrés.

Nb : Un sous-espace vectoriel étant un espace vectoriel, les exemples ci-dessous sont autant d'exemples d'espaces vectoriels.

2.a Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$

Nous avons vu qu'une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Du point de vue des équations une telle droite peut être décrite comme l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène :

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 = 0$$

Plus généralement, nous avons :

Proposition 20.7.— Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$.

L'ensemble F des solutions dans $\mathbf{K}^n$ de l'équation linéaire homogène

$$a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n = 0 \tag{20.1}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$

Vocabulaire : *Si de plus l'équation (20.1) est principale, i.e. les coefficients* a_k *sont non tous nuls,* F *est appelé un* ***hyperplan*** *de* $\mathbf{K}^n$.

Démonstration ▽

Pour démontrer cette proposition, j'utilise le **Corollaire** 20.6. :

- F est non vide :
  En effet, comme l'équation (20.1) est homogène, le n-uplet $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ est solution, *i.e.* $\vec{0} \in F$.
- F est stable par combinaisons linéaires :
  Soient $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de F. Par définition, cela signifie que :

$$\begin{array}{lcl\|l} 0 & = & a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n & \times \lambda \\ 0 & = & a_1\, y_1 + \cdots + a_n\, y_n & \times \mu \end{array}$$

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ un couple de scalaires. Les règles de calculs dans $\mathbf{K}^n$ conduisent immédiatement à :

$$0 = a_1[\lambda x_1 + \mu y_1] + \cdots + a_n[\lambda x_n + \mu y_n]$$

  Autrement dit $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n) \in F$. ▲

Exemples :

- dans $\mathbf{R}^2$, les hyperplans sont les droites passant par l'origine,
- dans $\mathbf{R}^3$, les hyperplans sont les plans passant par l'origine.

2.b Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Notons $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques et symétriques d'ordre n. D'après les propriétés de la transposition des matrices, $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ contiennent la matrice nulle et sont stables par combinaisons linéaires. Par la caractérisation des sous-espaces vectoriels, il en résulte :

Proposition 20.8.— $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration $\triangledown$

Les deux preuves étant parfaitement semblables, je montre simplement que $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, à l'aide du **Corollaire** 20.6.

- $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est non vide.
  En effet, la matrice nulle 0_n est antisymétrique.
- $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ est stable par combinaison linéaire :
  Soient donc A et B des matrices antisymétriques et (λ, μ) un couple de scalaires. D'après les propriétés de la transposition des matrices, il vient :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) &= {}^t(\lambda \cdot A) +^t (\mu \cdot B) = \lambda \cdot^t A + \mu \cdot^t B = \lambda(-A) + \mu \cdot (-B) \\ &= -\big(\lambda \cdot A + \mu \cdot B\big), \end{aligned}$$

  ce qui prouve que $\lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$. ▲

2.c Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}[X]$

Notons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ **l'ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à** n. D'après les propriétés du degré des polynômes, le polynôme nul appartient à $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires, par suite :

Proposition 20.9.— Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

Démonstration $\triangledown$

Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Alors

- $\mathbf{K}_n[X]$ est non vide :
  En effet, le polynôme nul étant de degré $-\infty$, il appartient à $\mathbf{K}_n[X]$.
- $\mathbf{K}_n[X]$ est stable pour $+$:
  En effet, si P et Q sont deux polynômes de degrés inférieurs à n, alors par la **Proposition** 15.2, $P+Q$ est de degré inférieur ou égal à $\max\{d^\circ P, d^\circ Q\}$. En particulier, $d^\circ(P+Q) \leq n$.
- $\mathbf{K}_n[X]$ est stable pour $\cdot$:
  En effet, si λ est un scalaire non nul et P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\lambda \cdot P$ et P ont même degré, par conséquent $\lambda \cdot P \in \mathbf{K}_n[X]$.

D'après le **Théorème** 20.5, ces trois assertions prouvent que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé et $D_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n. $D_n[X]$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$?

Solution $\triangledown$

Le polynôme nul est de degré $-\infty$. Il ne peut donc appartenir à $D_n[X]$. Comme tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ contient le polynôme nul, $D_n[X]$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. ▲

2.d Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

D'après les propriétés algébriques des suites convergentes de limite nulle, $\mathscr{E}_0$ (contient bien sûr la suite identiquement nulle) et est stable par combinaisons linéaires d'après le **Théorème** 7.15. Par conséquent :

Proposition 20.10.— $\mathscr{E}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Etant donné un couple $(a,b) \in \left(\mathbf{R}^\star\right)^2$ de réels non nuls, nous avons introduit l'ensemble $\mathscr{E}_{a,b}$ des suites $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de nombres réels vérifiant la relation de récurrence double :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$$

Nous avons déjà démontré (cf **Lemme** 12.16) que :

Proposition 20.11.— $\mathscr{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

2.e Sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$

La fonction constante égale à 0 est évidemment continue. De plus, d'après le **Théorème** 10.7, $\mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ est stable par combinaisons linéaires. Autrement dit :

Proposition 20.12.— L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbf{R})$ des fonctions continues sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$.

Remarque : Plus généralement, si $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, les opérations algébriques sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, montrent que $\mathcal{C}^k(I,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$.

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.13.— Intersection de sous-espaces vectoriels
Soient F, G et $(F_i)_{i\in I}$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. Alors

- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : pour la démonstration ci-dessous, j'utilise une version allégée du **Corollaire** 20.6 (la stabilité par toute combinaison linéaire $\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y}$ a été remplacée par la stabilité par toute combinaison linéaire de la forme $\lambda\cdot\vec{x}+\vec{y}$).

Démonstration ▽
Il suffit de prouver la deuxième assertion : notons $F = \displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$. Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$, j'utilise une *version allégée* du **Corollaire** 20.6 :

- montrons que F est non vide :
  Soit $i \in I$, comme par hypothèse F_i est un sous-espace vectoriel de E, il contient en particulier $\vec{0}_E$. C'est-à-dire, $\vec{0}_E \in F_i$. Ceci étant vrai pour tout indice i de I, j'en déduis que $\vec{0}_E \in F$.
- montrons que F est stable par combinaison linéaire :
  Soit $\vec{x},\vec{y}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbf{K}$.
  Soit $i \in I$ fixé. Comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à F, ils appartiennent en particulier à F_i. Or F_i est un sous-espace vectoriel de E, il est donc stable par combinaison linéaire. Il en résulte que $\lambda\cdot\vec{x}+\vec{y}$ est élément de F_i.
  Ceci étant vrai pour tout indice $i \in I$, j'en déduis que $\lambda\cdot\vec{x}+\vec{y} \in F$.

▲

3.a Application importante : sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$

Nous avons démontré précédemment (**Proposition** 20.7) que l'ensemble des solutions dans $\mathbf{K}^n$ d'une équation linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. En considérant l'intersection de tels sous-espaces, nous obtenons :

Théorème 20.14.— Soit (S_o) le système **homogène** de p équations linéaires d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & 0 & (L_1) \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\,x_n & = & 0 & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{p,1}\,x_1 & + & a_{p,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{p,n}\,x_n & = & 0 & (L_p) \end{array} \right.$$

L'ensemble

$$F = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \mid \vec{x} \textit{ est solution de } (S_o)\}$$

des solutions dans $\mathbf{K}^n$ de (S_o) est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Démonstration $\triangledown$
Notons pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, F_k l'ensemble des solutions de l'équation L_k. D'après la **Proposition** 20.7, les F_k sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Comme $F = \bigcap_{k=1}^{p} F_k$, il résulte de la **Proposition** 20.13 que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. ▲

Exercice : Démontrez cette proposition sans faire appel à la **Proposition** 20.13 en adoptant le point de vue matriciel.

Solution $\triangledown$
Notons A la matrice des coefficients de (S_o) de sorte que

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \textit{ est solution de } (S_o) \iff A \times X = 0_p,$$

*où X est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Il découle immédiatement des propriétés du calcul matriciel (**Théorème** 19.1 et **Théorème** 19.2) que :*

- $A \times 0_n = 0_p$
- $A \times (X + Y) = A \times X + A \times Y$
- $A \times (\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \big(A \times X\big)$.

En particulier, si X et Y sont les matrices colonnes associées à deux n-uplets $\vec{x}$ et $\vec{y}$ éléments de F, $A \times X = A \times Y = 0$. J'en déduis donc

- $\vec{0}_n \in F$.
- $\vec{x} + \vec{y} \in F$
- $\lambda \cdot \vec{x} \in F$.

*D'après le **Théorème** 20.5, ceci revient précisément à dire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.* ▲

Remarque : en fait, **tous** les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$ sont de cette forme, ainsi que nous le démontrerons ultérieurement.

Exemple : Soient $k \in \mathbf{R}$ un paramètre réel et (S_o) le système d'équations linéaires

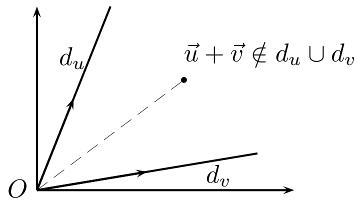
$$(S_o) \quad \left\{ \begin{array}{rrr} k\,(k-1)\,(k-2)x_1 & +k\,(k-1)\,x_2 & +k\,x_3 = 0 \\ & +k\,(k-1)\,x_2 & +k\,x_3 = 0 \\ & & +k\,x_3 = 0 \end{array} \right.$$

- Si $k = 0$, l'ensemble F des solutions est $\mathbf{R}^3$,
- Si $k = 1$, (S_o) est de rang 1. Il y a 2 variables **libres** et l'ensemble F des solutions est le sous-espace vectoriel $\{(x_1, x_2, 0),\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2\}$ qui ressemble à $\mathbf{R}^2$,
- Si $k = 2$, (S_o) est de rang 2. Il y a 1 variable **libre** et l'ensemble F des solutions est le sous-espace vectoriel $\{(x_1, 0, 0),\ x_1 \in \mathbf{R}\}$ qui ressemble à $\mathbf{R}$
- Si $k \notin \{0, 1, 2\}$, le système est de rang maximal 3. Il n'y a plus de variable libre. L'ensemble F des solutions est le plus petit sous-espace vectoriel : $F = \{(0, 0, 0)\}$.

4 Sommes de sous-espaces vectoriels

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel de E. En ce qui concerne la réunion, la situation est tout à fait différente puisque **la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel**[5]. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple simple de deux droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$:

Soient $d_{\vec{u}}$ et $d_{\vec{v}}$ les droites de $\mathbf{R}^2$ engendrées par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
La figure ci-contre illustre clairement le fait que la réunion de ces deux droites n'est pas stable par addition : ce n'est donc pas un espace vectoriel !



4.a Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 20.15.— Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de F_1 et de F_2**, et note $F_1 + F_2$, le **sous-espace vectoriel** de E défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} F_1 + F_2 & = & \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \ ; \ \vec{x}_1 \in F_1, \ \vec{x}_2 \in F_2\} \\ & = & \{\vec{x} \in E \mid \exists \vec{x}_1 \in F_1, \ \exists \vec{x}_2 \in F_2 \ : \ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2\} \end{array}}$$

Commentaires : en clair, $F_1 + F_2$ est l'ensemble de toutes les sommes d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Démonstration ▽
F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels. En conséquence, ils contiennent $\vec{0}_E$ et sont stables par combinaisons linéaires. Par suite

- $F_1 + F_2$ est non vide :
  En effet, il contient $\vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{0}_E$.
- $F_1 + F_2$ est stable par combinaison linéaire :
  En effet, soient $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ deux vecteurs de $F_1 + F_2$ (avec pour $i = 1, 2$, $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in F_i$), et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ un couple de scalaires. Alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} & = & \lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \mu \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \\ & = & \underbrace{(\lambda \cdot \vec{x}_1 + \mu \cdot \vec{y}_1)}_{\in F_1} + \underbrace{(\lambda \cdot \vec{x}_2 + \mu \cdot \vec{y}_2)}_{\in F_2}. \end{array}$$

D'après le **Corollaire** 20.6, il en résulte que $F_1 + F_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E. ▲

La notion de somme de sous-espaces se généralise à une famille $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n sous-espaces vectoriels de E de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_i = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n, \ (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}}$$

Exemple : considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, les sous-ensembles T_i et T_s constitués des matrices triangulaires inférieures et supérieures respectivement. T_s et T_i sont clairement non vides et stables par combinaisons linéaires. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$. De plus, comme toute matrice A s'écrit comme la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure, nous avons

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{C}) = T_s + T_i$$

[5] sauf dans le cas trivial où les deux sous-espaces sont *emboîtés* !

4.b Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus et considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ i & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous pouvons écrire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ i & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ i & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc pas unicité de la décomposition en ce cas.

Ceci conduit à adopter la définition suivante :

Définition : *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. On dit que F_1 et F_2 sont* ***supplémentaires*** *si*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \quad \exists!\, (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2 \ ; \ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2}$$

On note cette relation,

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2}$$

Commentaires : en clair, F_1 et F_2 sont des s.e.v supplémentaires de E si tout vecteur de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

En pratique : pour prouver que $E = F_1 \oplus F_2$ à l'aide de la définition :

- soit $\vec{x} \in E$, arbitraire, montrez par **analyse-synthèse**, qu'il existe un couple $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in F_1 \times F_2$ **unique**, tel que $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$.
- concluez : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Exemple : nous avons vu au chapitre précédent que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut s'écrire, de façon unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, autrement dit, les sous-espaces vectoriels $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires :

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbf{K})}$$

Reprenons la décomposition $\mathcal{M}_3(\mathbf{C}) = T_s + T_i$. Ces sous-espaces ne sont pas supplémentaires puisqu'il n'y a pas unicité de la décomposition. Pourtant, les coefficients situés strictement au-dessus (*resp.* au-dessous) de la diagonale sont uniquement déterminés. En revanche, les coefficients diagonaux sont loin d'être uniquement déterminés puisqu'ils peuvent être incorporés, aussi bien à la partie supérieure qu'à la partie inférieure de la décomposition de A. L'ambiguïté dans cette décomposition provient donc de la diagonale. Précisément $T_i \cap T_s$ est l'ensemble des matrices diagonales.

De manière plus générale, l'unicité de la décomposition est garantie lorsque les sous-espaces F_1 et F_2 ne s'intersectent qu'en $\vec{0}$, c'est ce qu'affirme la caractérisation suivante :

Théorème 20.16.— Caractérisation des sous-espaces supplémentaires
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. Alors

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{array}{l} \bullet \quad E = F_1 + F_2 \\ \bullet \quad F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\} \end{array}}$$

En pratique : pour démontrer que deux sous-espaces de E sont supplémentaires, cette caractérisation n'est pas toujours la plus commode à mettre en œuvre. Nous verrons une version achevée de cette caractérisation lors de notre prochaine étude des espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration $\triangledown$

- **la condition est nécessaire :** supposons que $E = F_1 \oplus F_2$.
  Soit $\vec{x} \in F_1 \cap F_2$, alors $\vec{0}_E$ peut se décomposer sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \vec{0}_E & = & \underbrace{\vec{x}}_{\in F_1} - \underbrace{\vec{x}}_{\in F_2} \\ \vec{0}_E & = & \vec{0}_E + \vec{0}_E \end{array}$$

  Par unicité de l'écriture, il en résulte que $\vec{x} = \vec{0}_E$.
  Ainsi, $F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0}_E\}$. Comme l'autre inclusion est vérifiée[6], il s'ensuit que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$.
- **la condition est suffisante :** supposons que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$.
  Soient $\vec{x} \in E$, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in F_1 \times F_2$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \end{array} \right.$$

  Par soustraction, il en résulte que $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2$ Notons $\vec{u}$ ce vecteur. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel, $\vec{u} = \vec{x}_1 - \vec{y}_1$ est élément de F_1. De même, comme F_2 est un sous-espace vectoriel, $\vec{u} \in F_2$. Ainsi, $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$. Par hypothèse, cela signifie que $\vec{u} = \vec{0}_E$. D'où je tire finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{0} \\ \vec{x}_2 - \vec{y}_2 = \vec{0} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 = \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 = \vec{y}_2 \end{array} \right.$$

▲

5 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

5.a Exemple introductif

Considérons le système homogène

$$(S_o) \quad \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -4x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -7x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Grâce à l'algorithme de Gauss, nous pouvons résoudre ce système :

$$S_o \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{array} \right.$$

Le sous-espace vectoriel F des solutions de (S_o) dépend de deux paramètres, les variables libres x_3 et x_4 :

$$F = \{(x_3 - 3x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4),\ (x_3, x_4) \in \mathbf{R}^2\}$$

En utilisant les règles de calcul dans $\mathbf{R}^4$, nous pouvons écrire pour tout couple $(x_3, x_4) \in \mathbf{R}^2$ que :

$$\begin{array}{rcl} (x_3 - 3x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) & = & (x_3, x_3, x_3, 0) + (-3x_4, x_4, 0, x_4) \\ & = & x_3 \cdot (1, 1, 1, 0) + x_4 \cdot (-3, 1, 0, 1) \end{array}$$

En notant $\vec{u} = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 1, 0, 1)$, nous pouvons donc décrire le sous-espace vectoriel F comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$F = \{\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

Dans un tel cas, nous dirons que le sous-espace vectoriel F est ***engendré*** par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

---

[6] pourquoi ?

5.b Définition, caractérisation

Plus généralement,

Définition : Sous-espace engendré par une partie
*Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur K, et $A \subset E$ une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel de E engendré** par A, et on note $\mathsf{Vect}\,(A)$ le sous-espace vectoriel de E, intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A :*

$$\mathsf{Vect}\,(A) = \bigcap_{F \supset A} F,$$

l'intersection étant étendue à tous les sous-espaces vectoriels F de E contenant A.

Retenez que : $\mathsf{Vect}\,(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Exemple : lorsque A est vide, $\mathsf{Vect}\,(\emptyset)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E : c'est donc $\mathsf{Vect}\,(\emptyset) = \{\vec{0}_E\}$.

Vocabulaire : *Si $F = \mathsf{Vect}\,(A)$, on dit que A **engendre** F.*

Remarque : Pour toute partie A de E, $\mathsf{Vect}\,(A)$ est bien un sous-espace vectoriel d'après la **Proposition** 20.13.

Par construction, $\mathsf{Vect}\,(A)$ contient tous les vecteurs éléments de A. Comme d'autre part, $\mathsf{Vect}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire, il contient nécessairement les combinaisons linéaires d'éléments de A. En fait, lorsque $A \neq \emptyset$, $\mathsf{Vect}\,(A)$ est précisément l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

Proposition 20.17.— Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie
Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur K et $A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ une partie finie et non vide de E. Alors , $\mathsf{Vect}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathsf{Vect}\,(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{a}_k \,;\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathsf{K}^n \right\}}$$

Commentaires : cette proposition se généralise au cas d'une partie quelconque A de E : même si A est infinie, $\mathsf{Vect}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A, étant entendu qu'une combinaison linéaire désigne toujours une somme finie.

Démonstration $\triangledown$
Soit A une partie non vide de E et notons F la partie de E définie par :

$$F = \left\{ \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \ ;\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathsf{K}^n \right\}$$

Il s'agit de démontrer que $F = \mathsf{Vect}\,(A)$. La preuve de cette égalité ensembliste sera par *double-inclusion* :

▶$F \subset \mathsf{Vect}\,(A)$
Comme nous l'avons déjà remarqué, $\mathsf{Vect}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel contenant les éléments de A, il contient donc toutes les combinaisons linéaires de ces éléments.

▶$\mathsf{Vect}\,(A) \subset F$
Montrons tout d'abord que F est un sous-espace vectoriel de E :

- comme A est non vide, F est non vide.
- soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathsf{K}^2$. Par construction de F, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des combinaisons linéaires des éléments de A.

$$\begin{array}{r||rcl} \lambda\times & \vec{x} & = & \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n \\ \mu\times & \vec{y} & = & \mu_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \mu_n \cdot \vec{a}_n \end{array}$$

A l'aide des règles de calcul dans E, il vient

$$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = [\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1] \cdot \vec{a}_1 + \cdots + [\lambda\lambda_n + \mu\mu_n] \cdot \vec{a}_n$$

Ainsi, $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}$ apparaît comme combinaison linéaire des éléments de A, il appartient donc à F.

Le **Théorème** 20.5, ou plus précisément son **Corollaire** 20.6 permet d'affirmer que F est un sous-espace vectoriel de E. Par construction, F contient A. Comme par définition $\mathsf{Vect}(A)$ est le plus petit des tels sous-espaces vectoriels de E, il en résulte que $\mathsf{Vect}(A) \subset F$. ▲

Exemples :

1. la droite vectorielle engendrée par un vecteur $\vec{u}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$. On la note indifféremment $\mathbf{K} \cdot \vec{u}$ ou $\mathsf{Vect}(\vec{u})$.
2. dans l'**Exemple introductif**, $F = \mathsf{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

En pratique :

- La **Proposition** 20.17 remplace la définition de sous-espace vectoriel engendré par une partie.
- La notion de sous-espace vectoriel engendré par une partie est aussi utile pour démontrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples :

- Soit $A = \{1, X, X^2, X^3\} \subset \mathbf{K}[X]$. $\mathsf{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des monômes $1, X, X^2$ et X^3. Un polynôme P appartient donc à $\mathsf{Vect}(A)$ s'il existe des scalaires a_0,a_1, a_2 et a_3 tels que
$$P = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + a_3 \cdot X^3$$
En clair, $\mathsf{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
- $F = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = ae^x + b\,x^2 + c\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois fonctions numériques définies sur $\mathbf{R}$ par :
$$\begin{array}{lrcl} \forall x \in \mathbf{R}, & f_1(x) & = & 1 \\ \forall x \in \mathbf{R}, & f_2(x) & = & e^x \\ \forall x \in \mathbf{R}, & f_3(x) & = & x^2 \end{array}$$
Ainsi, F est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ engendré par f_1, f_2, f_3. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice : On considère dans $E = \mathbf{R}^4$, le sous-espace vectoriel F engendré par les trois vecteurs $\vec{u}_1 = (1,0,0,1)$, $\vec{u}_2 = (-1,0,2,0)$ et $\vec{u}_3 = (1,1,0,0)$.
Montrez qu'un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ appartient à F *si et seulement si* ses coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 sont solutions d'une équation linéaire homogène que vous déterminerez.

Solution ▽

*Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de $\mathbf{R}^4$. D'après la **Proposition** 20.17,*

$$\vec{x} \in F \iff \boxed{\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3} \,;\text{tels que}\ \ \vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_1 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3$$

D'après les règles de calcul dans $\mathbf{R}^4$, cette équation vectorielle se traduit, en identifiant les coordonnées, par

$$\begin{aligned} \vec{x} \in F \quad &\iff \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3 \,;\text{tels que}\ \ (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3; \lambda_3; 2\lambda_2; \lambda_1) = (x_1; x_2; x_3; x_4) \\ &\iff \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3 \,;\text{tels que}\ \ (S_{\vec{x}}) \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = x_1 \\ & & \lambda_3 & = x_2 \\ & 2\lambda_2 & & = x_3 \\ \lambda_1 & & & = x_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, le fait que le vecteur $\vec{x}$ appartienne à F se traduit par le fait que le système d'équations linéaires $(S_{\vec{x}})$ admette une solution, c'est-à-dire qu'il soit $\boxed{\textit{compatible}}$.

Echelonnons le système $(S_{\vec{x}})$, grâce à la méthode de Gauss, *il vient*

$$(S_{\vec{x}}) \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & & = x_4 \\ & 2\lambda_2 & & = x_3 \\ & & \lambda_3 & = x_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = x_1 \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & & = x_4 \\ & 2\lambda_2 & & = x_3 \\ & & \lambda_3 & = x_2 \\ & & & 0 = x_1 - x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 \end{array} \right.$$

*D'après le théorème de résolution des systèmes échelonnés (**Théorème** 18.5), $(S_{\vec{x}})$ est compatible si et seulement si les équations auxiliaires sont vérifiées, c'est-à-dire précisément lorsque les coordonnées du vecteur $\vec{x}$ vérifient l'équation*

$$x_1 - x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 = 0$$

▲

III Familles de vecteurs

Nb : au programme officiel, seules apparaissent les familles finies de vecteurs, c'est la raison pour laquelle les démonstrations seront rédigées pour la plupart dans ce contexte.

Notations

- Une famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est une application d'un ensemble d'indices vers E.
- On dit que $\mathcal{G} = (\vec{v}_j)_{j \in J}$ est une **sur-famille** de $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$, ou que $\mathscr{F}$ est une **sous-famille** de $\mathcal{G}$, et on note $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{G}$ si
$$\{\vec{u}_i;\ i \in I\} \subset \{\vec{v}_j,\ j \in J\}$$

1 Famille génératrice

1.a Définition, exemples

Définition : *Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $\mathscr{F}$ une famille*[7] *de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{F}$ est une **famille génératrice** de E si*
$$\boxed{E = \mathsf{Vect}\,(\mathscr{F})}$$
En particulier, lorsque $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille finie de vecteurs de E, $\mathscr{F}$ est génératice de E si :
$$\boxed{\forall \vec{x} \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{u}_k}$$

Commentaires :

- lorsque $\mathscr{F}$ est finie, retenez qu'elle est génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéraire des vecteurs de $\mathscr{F}$.
- lorsque $\mathscr{F}$ est infinie, cette interprétation subsiste, à ceci près que les combinaisons linéaires désignent toujours des sommes finies.

Exemples :

1. Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ est génératrice car tout vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2)$ s'écrit
$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$$

2. De manière plus générale, la famille $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ définie par
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \vec{e}_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^e\ rang}, 0, \dots, 0)$$
est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, puisque grâce aux règles de calculs dans un espace vectoriel, tout vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ peut s'écrire sous la forme :
$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \vec{e}_k$$

Exercice :

1. Déterminez une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$,

2. Montrez que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$,

3. Déterminez une famille génératrice de $\mathbf{K}[X]$,

Solution $\triangledown$

[7] non nécessairement finie

1. *Une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ s'écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il est clair que cette matrice est totalement déterminée*[8] *par les 4 paramètres a,b, c et d. Plus précisément, en utilisant les règles de calcul dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, je peux décomposer M de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ apparaît comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des quatre matrices "basiques"

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} ;\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, E_1, E_2, E_3, E_4 est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

2. *Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$ un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à n. Par définition, cela signifie que P peut s'écrire sous la forme*

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \cdots + a_n X^n,$$

les (a_k) étant des scalaires pouvant être nuls. Autrement dit, un polynôme P est de degré inférieur ou égal à n s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes $1, X, X^2, \ldots, X^n$. Précisément, c'est dire que la famille $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ engendre $\mathbf{K}_n[X]$. ▲

Exercice : Considérons dans $\mathbf{R}^3$ la famille $\mathcal{G} = (\vec{x}_1; \vec{x}_2; \vec{x}_3; \vec{x}_4)$ où les vecteurs $\vec{x}_1; \vec{x}_2; \vec{x}_3$ et $\vec{x}_4$ sont donnés par $\vec{x}_1 = (1, -2, -3)$, $\vec{x}_2 = (-1, -1, 3)$, $\vec{x}_3 = (-2, 0, 1)$ et $\vec{x}_4 = (1, 2, -1)$.
La famille $\mathcal{G}$ est-elle génératrice ?

Solution ▽

La famille $\mathcal{G}$ est génératrice si et seulement si tout vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ de $\mathbf{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$. Plus précisément :

$$\mathcal{G} \text{ est génératrice} \iff \forall \vec{v} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3, \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4 \text{ tels que } \vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{x}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{x}_4$$

D'après les règles de calcul dans $\mathbf{R}^3$, cette égalité vectorielle se traduit par le fait que pour tout vecteur $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, le système $\left(S_{(a,b,c)}\right)$ de 3 équations d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ soit compatible, où

$$\left(S_{(a,b,c)}\right) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & = a \\ -2\lambda_1 & -\lambda_2 & & +2\lambda_4 & = b \\ -3\lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = c \end{array} \right.$$

Echelonnons $(S_{(a,b,c)})$ par la méthode de GAUSS, *il vient :*

$$\left(S_{(a,b,c)}\right) \iff \left\{ \begin{array}{rrrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & -2\lambda_3 & +\lambda_4 & = a \\ & -3\lambda_2 & -4\lambda_3 & +4\lambda_4 & = b + 2a \\ & & -5\lambda_3 & +2\lambda_4 & = c + 3a \end{array} \right.$$

Ce dernier système est échelonné de rang 3. Par conséquent (il n'y a pas d'équation auxiliaires), il est compatible.
Ainsi, pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tel que

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{x}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{x}_4,$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{G}$ est génératrice. ▲

1.b Propriétés des familles génératrices

Vu l'interprétation des familles génératrices, il est clair qu'on peut toujours rajouter des vecteurs à une famille génératrice, on obtient alors une famille génératrice :

Proposition 20.18.— Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de E telles que $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{G}$. Alors

Si $\mathscr{F}$ est génératrice, **alors** $\mathcal{G}$ est génératrice.

[8] et uniquement déterminée, mais c'est une autre histoire !

Démonstration $\triangledown$
supposons que $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ soit une famille génératrice finie.
Soit $\vec{x}$ un vecteur de E. Comme par hypothèse $\mathscr{F}$ est génératrice, $\vec{x}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{u}_k,$$

où les $\vec{u}_k$ appartiennent à $\mathscr{F}$. Comme par hypothèse $\mathscr{F} \subset \mathcal{G}$, il en résulte que $\vec{x}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{G}$.
Comme $\vec{x}$ était arbitraire, nous avons prouvé que tout vecteur de E est comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{G}$. C'est dire précisément que $\mathcal{G}$ est génératrice. $\blacktriangle$

Inversement, on peut retirer d'une famille génératrice tous les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres sans perdre le caractère générateur. C'est le sens de la proposition suivante :

Proposition 20.19.— Soient $\mathscr{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1})$ une famille **génératrice** de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur $\mathbf{K}$. Alors

$(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est génératrice
si et seulement si
$\vec{v}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$.

Démonstration $\triangledown$

- si $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est génératrice, alors tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. En particulier, $\vec{v}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.
- si $\vec{v}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Montrons que $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est génératrice :
  Soit $\vec{x} \in E$ une vecteur quelconque de E.
  Comme par hypothèse $\mathscr{F}$ est géneratrice, $\vec{x}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$. Plus précisément, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$, des scalaires λ, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\vec{x} = \lambda \cdot \vec{v}_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \vec{v}_k$$

  D'autre part, $\vec{v}$ s'exprime lui-aussi comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. En remplaçant, dans l'égalité ci-dessus, $\vec{v}$ par son expression en fonction des $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, j'en déduis que $\vec{x}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\vec{x}_i$. $\blacktriangle$

2 Famille libre

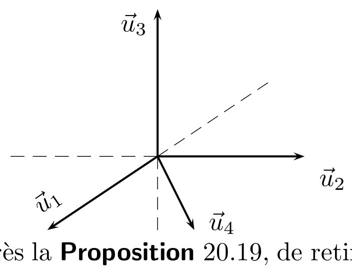
L'intérêt des familles génératrices est de *concentrer* les informations utiles à la connaissance d'un espace vectoriel, ces propriétés se *propageant* ensuite par combinaisons linéaires. Pour cette raison, nous sommes amenés à rechercher les familles génératrices *minimales*, c'est-à-dire ayant un minimum de vecteurs.

2.a La notion de dépendance linéaire

Exemple introductif
Considérons dans $\mathbf{R}^3$ la famille de vecteurs

$\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$,
$\vec{u}_3 = (0,0,1)$ et $\vec{u}_4 = (1,1,0)$.

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est génératrice.



- Comme $\vec{u}_4 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, il est possible, d'après la **Proposition** 20.19, de retirer le vecteur $\vec{u}_4$ de cette famille sans perdre le caractère générateur.
- La famille obtenue $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est génératrice et minimale :
  - $\vec{u}_1$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$
  - $\vec{u}_2$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$
  - $\vec{u}_3$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

2.b Définitions, exemples

Plus généralement, partant d'une famille gnératrice $\mathcal{G}$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, on peut retirer d'une famille génératrice tous les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres sans perdre le caractère générateur. Répétons ce procédé tant que l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres. Au terme de ce processus, nous obtenons une famille *génératrice minimale*, c'est-à-dire pour laquelle **aucun** vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres. Autrement dit, une condition nécessaire pour qu'une famille soit *génératrice minimale* est qu'il n'existe pas de relation linéaire entre les vecteurs de la famille.

Ceci conduit à la notion de *famille libre* ou *vecteurs linéairement indépendants* :

Définition : *Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.*
Une famille ***finie*** *$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est dite* ***libre*** *si :*

$$\boxed{\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \quad \Big(\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}_E \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\Big)}$$

Commentaires : cette définition quelque peu formelle –mais **incontournable**– traduit rigoureusement le fait qu' **aucun des vecteurs de $\mathscr{F}$ n'est combinaison linéaire des autres**.

Retenez que : la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre si **la seule** combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne $\vec{0}_E$ est la combinaison linéaire triviale :

$$0 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0}_E$$

Remarque : une famille quelconque $\mathscr{F}$ de vecteurs de E est dite **libre** si toute sous-famille finie de $\mathscr{F}$ l'est.

Vocabulaire : *on dit indifféremment que la famille $\mathscr{F}$ est libre ou que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ sont* ***linéairement indépendants****.*

En pratique : pour démontrer que la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre :

- la preuve commence par «soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}_E$ »
- *traduisez* cette *égalité vectorielle* et déduisez-en que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Nb : *ne soyez pas surpris si cela se finit par la résolution d'un SEL_o*

Exemples :

1. la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ où $\vec{e}_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k^e\ rang}, 0, \ldots, 0)$ est une famille libre.
2. la famille $(\sin x, \cos x)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
3. la famille $1, X, X^2, 3 - 2X + X^2$ n'est pas libre car $3 \cdot 1 - 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 - 1 \cdot (3 - 2X + X^2) = 0$.

On comprend facilement la notion de famille libre en examinant son contraire :

Définition : *Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur $\mathbf{K}$. On dit que $\mathscr{F}$ est* ***liée*** *si $\mathscr{F}$ n'est pas libre, c'est-à-dire*

$$\boxed{\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\},\ \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}_E}$$

Vocabulaire : *on dit indifféremment que la famille est liée ou que* ***les vecteurs sont linéairement dépendants***

Commentaires : en clair $\mathscr{F}$ est liée *si et seulement si* l'un –au moins– des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres.

Exercice : Dans $\mathbf{R}^3$ dire si les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont linéairement dépendants ou pas lorsque

1. $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$.
2. $\vec{u}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (0, -2, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, -1, 0)$.

Solution $\triangledown$

Il s'agit de savoir dans les deux cas si la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est libre ou pas. Par définition, il s'agit de déterminer si la propriété universelle

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3, \qquad \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

est vraie ou pas !
Pour le savoir, la démonstration démarre systématiquement par :
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$.
La question est donc : a-t-on nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

1. $\boxed{\text{Soit } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3}$ *tel que* $\boxed{\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}}$. *Traduisons cette égalité vectorielle, en identifiant coordonnées par coordonnées, il vient*

$$(S_o) \quad \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

Echelonnons ce système homogène par la méthode de Gauss, *il en résulte*

$$(S_o) \iff \begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \\ & & 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système homogène (S_o) est donc équivalent à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls. Il est donc de Cramer *et par suite il admet comme unique solution le triplet* $\boxed{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)}$.
Ainsi, la seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale. Par définition, c'est dire que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

2. *Procédons comme précédemment :*
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$. Cette égalité vectorielle se traduit par le système d'équations linéaires homogène :

$$(S_o) \quad \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

Par la méthode de Gauss, *il en résulte l'équivalence :*

$$(S_o) \iff \begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 = 0 \\ & -2\lambda_2 & -2\lambda_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de résolution des systèmes échelonnés, ce système étant de rang 2, il admet donc une infinité de solutions paramétrée par la variable libre λ_3. Par exemple, en prenant $\lambda_3 = -1$, nous obtenons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, -1)$. Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont liés par la relation

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 1 \cdot \vec{u}_2 - 1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Ainsi, il existe d'autres relations linéaires que la relation triviale entre les $\vec{u}_i$. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est donc liée. ▲

2.c Propriétés des familles libres

Proposition 20.20.— Propriétés des familles libres
Soient $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, $\mathscr{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de E.

- Si $\vec{0} \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ est liée.
- Si $\mathscr{F} = (\vec{u})$, $\mathscr{F}$ est libre *si et seulement si* $\vec{u} \neq \vec{0}$.
- Si $\mathscr{F} = (\vec{u}; \vec{v})$, $\mathscr{F}$ est libre *si et seulement si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Si $\mathscr{F}$ est libre et $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, alors $\mathcal{G}$ est libre.
- Si $\mathscr{F}$ est liée, et $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathscr{F}$, alors $\mathcal{G}$ est liée.

Démonstration $\triangledown$
conformément au programme officiel, les familles considérées ci-dessous sont finies, même si le résultat subsiste dans le cas général.

- Si le vecteur nul $\vec{0}_E$ est élément de $\mathscr{F}$, alors $1 \cdot \vec{0}_E$ est une combinaison linéaire [9] non triviale de vecteurs de $\mathscr{F}$ qui donne le vecteur nul.
- Montrons que $(\vec{u})$ est liée *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$. D'après les règles de calculs dans un espace vectoriel, nous avons :

$$\begin{array}{lll} (\vec{u}) \text{ est liée} & \textit{si et seulement si} & \exists \lambda \in \mathbf{K}^\star,\ \lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}. \\ & \textit{si et seulement si} & \vec{u} = \vec{0}. \end{array}$$

- Si $\mathscr{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ est liée alors il existe un couple (λ, μ) de scalaires non tous les deux nuls, tel que

$$\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Supposons sans perte de généralité que $\lambda \neq 0$. En divisant les deux membres de cette égalité par λ, j'obtiens $\vec{u} = -(\mu/\lambda) \cdot \vec{v}$. Par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$. Supposons sans perte de généralité que $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$. En ce cas, je peux écrire

$$\vec{0} = \vec{v} - \lambda \cdot \vec{u}$$

Par suite la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée.
- Supposons que $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre et finie. Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{F}$ une sous-famille de $\mathscr{F}$. Supposons, quitte à changer la numérotation que $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$, où $p \leq n$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ des scalaires tels que $\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}$. En posant $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, il vient

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$$

Or par hypothèse, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre. Par suite, seule la combinaison triviale des vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ donne le vecteur nul. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En particulier, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Autrement dit, nous avons démontré :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p, \quad \Big(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0\Big)$$

- Il s'agit simplement de la contraposée de l'assertion précédente. ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On considère dans $\mathbf{K}_n[X]$ la famille de polynômes $(P_k)_{k \in [\![0,n,]\!]}$ définie par

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad P_k = k \cdot X^k + X^{k-1}$$

Démontrez que les P_k sont linéairement indépendants.

Solution ▽

Il s'agit comme précédemment de pouver que la seule combinaison linéaire des P_k qui donne le polynôme nul est la combinaison linéaire triviale :
Soit donc $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ telle que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot P_k.$$

Explicitons cette égalité entre polynômes, il vient

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 \cdot P_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot P_k = \lambda_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \big(k \cdot X^k + X^{k-1}\big) \\ &= \lambda_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} (k\lambda_k) \cdot X^k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot X^{k-1} = \lambda_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} (k\lambda_k) \cdot X^k + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} \cdot X^k \\ &= \big(\lambda_0 + \lambda_1\big) \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \big(k\lambda_k + \lambda_{k+1}\big) \cdot X^k + n \cdot X^n \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de ces deux polynômes, il vient :

$$\left\{\begin{array}{cccccl} \boxed{1}\lambda_0 & +\lambda_1 & & & & = 0 \\ & \boxed{1}\lambda_1 & +\lambda_2 & & & = 0 \\ & & \boxed{2}\lambda_2 & +\lambda_3 & & = 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_n & = 0 \\ & & & & \boxed{n}\lambda_n & = 0 \end{array}\right.$$

[9] rigolote, certes, mais

Le système homogène obtenu est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent il admet pour unique solution le $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.
Ainsi, la seule combinaison linéaire des (P_k) qui donne le polynôme nul est la combinaison linéaire triviale. Les P_k sont donc linéairement indépendants. ▲

3 Base d'un espace vectoriel

Intuitivement, partant d'une famille génératrice $\mathscr{F}$, nous pouvons utiliser la **Proposition** 20.19 pour retirer *un à un* les vecteurs liés aux autres. A la fin de ce processus, nous obtenons une famille *génératrice minimale*. De plus, il est clair qu'une telle famille se trouve aussi être libre puisqu'il n'existe aucune relation de dépendance entre les vecteurs qui la compose. Une telle famille **à la fois libre et génératrice** est appelée une *base* de E.

3.a Définition

Définition : *Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, et $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E.*
La famille est appelée une ***base*** *de E si elle est libre et génératrice.*

Commentaires : une base de E est une famille génératrice minimale.

En pratique : pour démontrer qu'une famille est une base, vous pouvez :

- montrer qu'elle est libre, et
- montrer qu'elle est génératrice.

Exercice : Démontrez que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, est une base de $\mathbf{R}^4$ lorsque

$$\vec{u}_1 = (1,0,1,2);\ \vec{u}_2 = (1,0,0,1);\ \vec{u}_3 = (0,1,2,1);\ \vec{u}_3 = (-1,1,-1,1)$$

Solution ▽

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre

Soit donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ un 4-uplet de scalaires tel que

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{u}_4 = \vec{0}.$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. L'égalité vectorielle ci-dessus se traduit en coordonnées par le système linéaire homogène

$$(S_o) \quad \left\{ \begin{array}{rrrr} \lambda_1 & +\lambda_2 & & -\lambda_4 = 0 \\ & & \lambda_3 & +\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 & -\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 = 0 \end{array} \right.$$

Or, d'après l'algorithme de GAUSS, *(S_o) est équivalent au système échelonné :*

$$(S_o) \iff \left\{ \begin{array}{rrrr} \boxed{1}\lambda_1 & +\lambda_2 & & -\lambda_4 = 0 \\ & \boxed{1}\lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ & & \boxed{1}\lambda_3 & -3\lambda_4 = 0 \\ & & & \boxed{1}\lambda_4 = 0 \end{array} \right.$$

Ce système étant triangulaire à cefficients diagonaux non nuls, il est de CRAMER. *Par conséquent, (S_o) admet pour unique solution le 4-uplet $(0,0,0,0)$, ce qui prouve que la famille $\mathscr{B}$ est libre.*

Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice

Soit $\vec{v} = (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^4$. Montrons que $\vec{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$. Il s'agit donc de prouver l'existence d'un 4-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tel que

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{u}_4 = \vec{v}.$$

L'existence de ce 4-uplet se traduit en coordonnées par le fait que le système d'équations linéaires

$$(S_{\vec{v}}) \quad \left\{ \begin{array}{rrrr} \lambda_1 & +\lambda_2 & & -\lambda_4 = a \\ & & \lambda_3 & +\lambda_4 = b \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 & -\lambda_4 = c \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 = d \end{array} \right.$$

soit compatible. Or, d'après le calcul précédent, le système homogène associé à $(S_{\vec{v}})$ est un système de CRAMER. *D'après le* **Théorème** *18.13, ceci entraîne que $(S_{\vec{v}})$ est lui-même un système de* CRAMER *donc en particulier compatible. Par conséquent, il existe un 4-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tel que*

$$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{u}_3 + \lambda_4 \cdot \vec{u}_4 = \vec{v}.$$ ▲

Remarque : La résolution de l'exercice ci-dessus révèle un fait intéressant.
Soit $\mathscr{F}$ une famille de 4 vecteurs de $\mathbf{R}^4$.
Si $\mathscr{F}$ est libre, alors [10]elle est automatiquement génératrice.
Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est génératrice, on peut prouver[11] à l'aide du **Théorème** 18.14 que $\mathscr{F}$ est libre.
Ainsi, pour une famille de **4** vecteurs de $\mathbf{R^4}$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\mathscr{F} \text{ est une base} \iff \mathscr{F} \text{ libre} \iff \mathscr{F} \text{ génératrice .}$$

3.b Caractérisation des bases

Théorème 20.21.— Caractérisation des bases
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E. Alors,

$\mathcal{B}$ est une base de E
si et seulement si
tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$

En particulier, si $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ est une famille finie, $\mathcal{B}$ est une base *si et seulement si*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E,\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \vec{b}_k}$$

Vocabulaire : *ainsi, tout vecteur $\vec{x}$ de E se* décompose *suivant les vecteurs de la base.*

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{b}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{b}_n$$

Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui représentent le vecteur $\vec{x}$ s'appellent les ***coordonnées*** *de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple : Avec les notations de l'exercice précédent, le vecteur $\vec{v} = (-1, 7, 3, 11)$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ de la façon suivante :

$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{u}_1 + 2 \cdot \vec{u}_2 + 3 \cdot \vec{u}_3 + 4 \cdot \vec{u}_4$$

Démonstration ▽
conformément au programme, nous démontrons cette caractérisation dans le cas d'une famille finie $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$.

- **La condition est suffisante :** supposons que tout vecteur s'écrive de façon unique comme combinaison linéaire des $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$, montrons que $\mathcal{B}$ est une base.
  - $\mathcal{B}$ est génératrice puisque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des $(\vec{b}_i)$.
  - $\mathcal{B}$ est libre.
    Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$\begin{aligned} \vec{0}_E &= \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \\ &= 0 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{b}_n \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de $\vec{0}_E$ comme combinaison linéaire des $(\vec{b}_i)$, il vient :

$$0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$$

[10]à l'aide du **Théorème** 18.13
[11]faites-le !

- **La condition est nécessaire :** supposons que $\mathcal{B}$ soit une base de E, et montrons que tout vecteur de E peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire des $(\vec{b}_i)$.
  Soit $\vec{x} \in E$.
  - Comme $\mathcal{B}$ **est génératrice**, il **existe** un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, tel que
  $$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{b}_i.$$
  - Montrons que cette décomposition est unique.
    Supposons donc qu'il existe (μ_i) tel que
  $$\begin{array}{c|l} + & \vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n \\ - & \vec{x} = \mu_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu_2 \cdot \vec{b}_2 + \cdots + \mu_n \cdot \vec{b}_n \end{array}$$
    Par soustraction, il vient
  $$\vec{0}_E = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{b}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot \vec{b}_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{b}_n.$$
    Comme $\mathcal{B}$ **est libre**, ceci n'est possible que si cette combinaison linéaire est la combinaison linéaire triviale :
  $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = \mu_i,$$
    ce qui prouve l'**unicité** de la décomposition. ▲

En pratique : le **Théorème** 20.21 est particulièrement utile lorsqu'on vous demande de trouver une base d'un espace vectoriel (et non pas de vérifier qu'une famille donnée est une base) :

Exercice : On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites numériques. On considère

$$F = \{u \in E | \; \forall n \in \mathbf{N}; \; 2u_{n+2} = 5u_{n+1} - 2u_n\}$$

1. Démontrez que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminez une base de F.

Solution ▽
F est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Nous avons déjà prouvé qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E. De plus, l'équation caractéristique de F :

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

admet pour racines 2 et $1/2$. Par conséquent, pour toute suite (u_n) élément de F, il existe un couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, unique tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda \, 2^n + \mu \, \frac{1}{2^n}.$$

Autrement dit, en notant (a_n) et (b_n) les suites géométriques de premier terme 1 et de raisons respectives 2 et $1/2$, nous avons montré que tout vecteur $u \in F$ se décompose de façon unique sous la forme :

$$u = \lambda \cdot a + \mu \cdot b.$$

D'après la **Caractérisation des bases**, *cela signifie que les suites géométriques $a = (2^n)$ et $b = (1/2^n)$ forment une base de F.* ▲

4 Exemples de bases

Pour conclure ce chapitre, voici quelques exemples de bases d'espaces vectoriels à connaître parfaitement.

4.a Base canonique de $\mathbf{K}^n$

Théorème 20.22.— Base canonique de $\mathbf{K}^n$
Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ définie par $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \vec{e}_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^e\ rang}, 0, \dots, 0)$

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbf{K}^n\text{, appelée } \textbf{base canonique} \text{ de } \mathbf{K}^n.}$$

Démonstration ▽
En effet,

- $\mathcal{B}$ est génératrice car tout vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{x} = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n \cdot (0, \dots, 0, 1) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{e}_i$$

- $\mathcal{B}$ est libre car si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un n-uplet de scalaires, alors

$$\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

  Par conséquent, la relation $\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$ entraîne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n = (0, \dots, 0)$. Par définition de l'égalité dans $\mathbf{K}^n$, ceci n'est possible que lorsque tous les λ_i sont nuls.

▲

4.b Base canonique de $\mathbf{K}[X]$

Théorème 20.23.— Bases canoniques d'espaces de polynômes

- Soit $n \in \mathbf{N}$. La famille de polynômes $(X^k)_{k \in [\![0,n]\!]} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$**.
- La famille de polynômes $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}[X]$**.

Démonstration ▽
Notons $P_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul $k \in \mathbf{N}^\star$, $P_k = X^k$.

- Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, montrons que $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
  - $\mathcal{B}_n$ est génératrice :
    En effet, soit P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par définition, P s'écrit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Autrement dit, $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + \cdots + a_n \cdot P_n$.
    Ainsi, P s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_n$.
  - $\mathcal{B}_n$ est libre :
    Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n \cdot P_n &=& \ 0 \qquad (20.2) \\ \iff & \qquad \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n &=& \ 0 \end{aligned}$$

    (20.2) est une égalité de polynômes. Par identification des coefficients, il en résulte directement que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.
  - $\mathcal{B}$ est génératrice :
    En effet, soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Notons n le degré de P, de sorte que $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Alors, d'après le premier point, P s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_n$. Comme $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$, P est donc, *a fortiori*, combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
  - $\mathscr{B}$ est libre :
    Par définition, il s'agit de vérifier que toute sous-famille finie de $\mathcal{B}$ est libre. Ceci résulte aisément du premier point puisqu'une sous-famille finie de $\mathcal{B}$ est contenue dans les familles $\mathcal{B}_n$, pourvu que n soit suffisamment grand.

▲

4.c Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ qui a pour seul coefficient non nul, 1 à la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne. Elle est définie par :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k} \times \delta_{j,\ell}$$

Autrement dit,

$$\begin{array}{ccccc}
E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & E_{1,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & E_{2,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & & \ddots & \\
 & & & E_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Théorème 20.24.— Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$
Soit $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ la famille de matrices définies ci-dessus.

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), \text{ appelée } \textbf{base canonique} \text{ de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}).}$$

Démonstration ▽
left as an exercise for the reader. ▲

IV How To

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

0.d Comment démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel

- En général, vous utilisez la caractérisation des sous-espaces vectoriels : il s'agit de démontrer que
  - F **est non vide**.
    Pour cela, vous pouvez démontrer que $\vec{0}_E \in F$.
  - F **est stable par combinaison linéaire**.
    Vous pouvez au choix :
    - démontrer que $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \begin{cases} \vec{x} + \vec{y} \in F \\ \lambda \cdot x \in F \end{cases}$
    - démontrer que $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F$.
- vous pouvez vérifier que F est le sous-espace vectoriel engendré par une partie de E, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de E. Cette méthode est particulièrement efficace lorsqu'on connaît un *paramétrage* de F.

  Exemple : Etant donné un vecteur $\vec{u}$ du plan $(\mathbf{R}^2)$, $F = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^2 | \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}$.
- vous pouvez vérifier que F est une intersection de sous-espaces vectoriels connus,
- ou bien que F est la somme de sous-espaces vectoriels connus.
- Nous verrons d'autres stratégies au prochain chapitre.

0.e Comment démontrer qu'un ensemble E muni de deux lois est un espace vectoriel

- E est-il l'un des espaces vectoriels de référence : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$, *etc* ... ?
- E est-il un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ?
- Si rien de tout cela n'a marché, il faut utiliser la définition et
  - démontrer les 4 propriétés de l'addition : associativité, commutativité, existence d'un élément neutre et existence d'opposés.
  - démontrer les 4 propriétés de la multiplication : associativité, distributivité à droite et à gauche et $1\cdot$ agit comme l'identité.

0.f Comment démontrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

- Vous pouvez utiliser la définition :
  - soit $\vec{x} \in E$, arbitraire, montrez par **analyse-synthèse**, qu'il existe un couple $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in F_1 \times F_2$ **unique**, tel que $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$.
  - concluez : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.
- ou bien utiliser la caractérisation

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff E = F_1 + F_2 \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$$

Familles de vecteurs

0.g Comment démontrer qu'une famille $\mathcal{G}$ de vecteurs est génératrice

- Par définition, il s'agit de démontrer que *tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de* $\mathcal{G}$.
- Parfois –pour les exercices théoriques– on démontre directement que $E = \mathsf{Vect}(\mathcal{G})$.
- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres suivants.

0.h Comment trouver une famille génératrice

La question que vous devez vous poser : quels sont les paramètres qui permettent de décrire un élément de E ? Partant de là, il s'agit de factoriser :

Exemple : Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ s'écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il y a donc 4 paramètres. On peut alors écrire que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est donc génératrice.

0.i Comment démontrer qu'une famille $\mathcal{L}$ est libre

La question que vous devez vous poser : existe-t-il des relations (linéaires) *liant* les vecteurs de $\mathcal{L}$?

Par exemple,
- Si le vecteur nul appartient à $\mathcal{L}$, la famille est liée ;
- Si visiblement un vecteur de $\mathcal{L}$ est combinaison linéaire des autres, la famille est liée.

Lorsqu'aucune relation linéaire ne saute aux yeux, utilisez la définition de famille libre :

- Lorsque $\mathcal{L} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$, la démonstration suit le schéma suivant :
  - Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des scalaires tels que
  $$\lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = \vec{0}.$$
  - *traduisez* cette égalité entre vecteurs,
  - *déduisez-en* que la seule possibilité est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
- Lorsque $\mathcal{L}$ est infinie, il s'agit de montrer que toute sous-famille finie $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de $\mathcal{L}$ est libre. On procède alors comme ci-dessus.
- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres suivants.

0.j Comment démontrer qu'une famille $\mathcal{B}$ est une base

- En utilisant la définition, vous démontrez que
  - $\mathcal{B}$ est libre
  - $\mathcal{B}$ est génératrice.
- En utilisant la caractérisation, vous démontrez que tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- Nous verrons d'autres stratégies dans les chapitres suivants.