Chapitre 2

Nombres complexes et trigonométrie

Sommaire

OBJECTIFS

- Formules d'Euler et Moivre
- Application des complexes à la trigonométrie, calculs de sommes trigonométriques
- Notations algébriques et exponentielle
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
- Racines n ièmes d'un nombre complexe non nul
- Exemples de résolution d'équations algébriques

Introduction

Nous avons vu au **Chapitre 1** que tout nombre réel **positif** possède une (unique) racine $n^{ième}$ dans $\mathbf{R}^+$. Mais finalement, pour quelle raison l'équation

$$\boxed{x^2 = -1}$$

ne peut-elle avoir de solution dans $\mathbf{R}$?
À cause de la compatibilité de l'ordre avec la multiplication (cf **Théorème** 1.8) bien sûr ! La question qui se pose naturellement est donc la suivante :

Si nous *sacrifions* la compatibilité de l'ordre avec les opérations $+$ et $\times$ est-il possible de construire un ensemble de nombres dans lequel tout nombre possèderait des racines $n^{\text{ièmes}}$?

Un tel ensemble de nombres, contenant en particulier les nombres réels existe . . . c'est le ***corps* des nombres complexes**.

I Notation algébrique des nombres complexes

Sa construction étant *hors-programme*, nous admettons l'existence d'un ensemble, noté $\mathbf{C}$ muni d'une addition et d'une multiplication [1] tel que :

Théorème 2.1.— Propriétés fondamentales de C

- $\mathbf{C}$ contient l'ensemble des réels et un élément $\boldsymbol{i}$ tel que $i^2 = -1$.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un couple de réels $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, unique tel que $z = x + i \times y = x + y \times i$.
- Tout nombre réel x s'écrit $x + i \times 0$ ou $x + 0 \times i$.
- Pour tous nombres réels x, x', y, y', on a :

$$\boxed{\begin{array}{rcl}(x+iy)+(x'+iy') & = & (x+x')+i(y+y') \\ (x+iy)\times(x'+iy') & = & (xx'-yy')+i(xy'+x'y)\end{array}}$$

Définition : *Les éléments de* $\mathbf{C}$ *sont appelés les* ***nombres complexes***.

1 Le nombre complexe i

Nous venons de le voir, le nombre complexe i vérifie [2] $i^2 = -1$.
On peut facilement en déduire toutes les puissances entières du nombre complexe i.

Corollaire.— Soit $k \in \mathbf{Z}$ alors $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ et $i^{4k+3} = -i$.

1. notées $+$ et $\times$ comme dans $\mathbf{R}$
2. Au fait, est-ce le seul nombre complexe solution de l'équation $x^2 = -1$?

Comme nous le verrons plus tard, il garantit l'existence dans **C** de racines $n^{ièmes}$ pour n'importe quel nombre réel ou complexe. Mais le *prix à payer* pour cela, c'est l'**impossibilité** (attendue) d'une structure ordonnée sur **C**, compatible avec les opérations décrites plus haut. Plus précisément :

Théorème.— Il n'existe pas de relation d'ordre total sur **C** compatible [3] avec les opérations de **C**.

Démonstration ▽
Supposons par l'*absurde* qu'il existe sur **C** une relation d'ordre total, notée $\leq$ telle que pour tout triplet $(\xi, \zeta, \eta) \in \mathbf{C}^3$ de nombres complexes,

$$\begin{array}{lll} \textbf{si } \xi < \eta & \textbf{alors} & \xi + \zeta < \eta + \zeta \\ \textbf{si}\big(\xi < \eta \text{ et } \zeta > 0\big) & \textbf{alors} & \xi.\zeta < \eta.\zeta. \end{array}$$

Il en résulterait que le carré de tout nombre complexe non nul est strictement positif. En effet, soit $z \in \mathbf{C}^\star$. Comme l'ordre est supposé total, deux cas se présentent :

- Si $z > 0$, alors par la compatibilité de l'ordre avec la multiplication , il vient $z^2 > 0$.
- Si $z < 0$, alors $-z > 0$, donc d'après le premier cas $z^2 = (-z)^2 > 0$.

Dans tous les cas, si $z \neq 0$, alors $z^2 > 0$. Afin d'aboutir à un contradiction, appliquons ceci aux deux nombres complexes non nuls 1 et i. Il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} 1 & > & 0 \\ -1 & > & 0 \end{array}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités, il s'ensuit que $0 > 0$ *Contradiction!* ▲

Conséquence : N'écrivez JaMaIS ! le symbole $\leq$ entre deux complexes... Cela n'a vraiment aucun sens.

2 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

Par construction de **C**, nous avons

Théorème 2.2.— Notation algébrique d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, il existe un couple de nombres **réels** $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, unique, tel que

$$\boxed{z = x + iy}$$

L'unicité dans le **Théorème** 2.2 permet d'adopter les définitions suivantes :

Définition : *Soit $z \in \mathbf{C}$, et $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $z = x + iy$.*

- *Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z et noté $\mathfrak{Re}\, z$.*
- *Le nombre réel y est appelé la **partie imaginaire** de z est noté $\mathfrak{Im}\, z$.*

En pratique : l'égalité de deux nombres complexes revient donc à l'égalité de leurs parties réelle et imaginaire :

Corollaire 2.3.— Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, alors $z = z'$ *si et seulement si* $\mathfrak{Re}\, z = \mathfrak{Re}\, z'$ et $\mathfrak{Im}\, z = \mathfrak{Im}\, z'$. En particulier,

$$\boxed{z = 0 \iff \begin{array}{l} \bullet\ \mathfrak{Re}\, z = 0 \\ \bullet\ \mathfrak{Im}\, z = 0 \end{array}}$$

3 Les nombres réels forment un sous-ensemble de C

Un réel x s'écrit $x = x + i \times 0$. Ainsi, les réels sont les nombres complexes de partie imaginaire nulle.

Exemple : 1 et 0 dénotent aussi bien les nombres réels que les nombres complexes correspondants.

3. au sens du **Théorème** 1.8

Retenez la

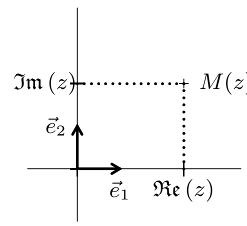
Proposition-Définition 2.4.— Soit $z \in \mathbf{C}$.
- z est **réel** *si et seulement si* $\mathfrak{Im}\, z = 0$,
- z est dit **imaginaire pur** si $\mathfrak{Re}\, z = 0$.

Notation : $\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Im}\, z = 0\}$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathbf{C}$ *formé des nombres réels et* $i\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Re}\, z = 0\}$ *l'ensemble des nombres imaginaires purs. Enfin, on note* $\mathbf{C}^\star = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

4 Le plan complexe

Les nombres complexes peuvent être interprétés comme des points du plan affine réel $\mathcal{P}$. D'un point de vue historique, cette interprétation a largement contribué à l'acceptation par les mathématiciens des nombres complexes, leur conférant une certaine *réalité* !

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. À tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, on associe le point $M(z)$ du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées $\big(\mathfrak{Re}\, z, \mathfrak{Im}\, z\big)$ dans le repère $\mathcal{R}$. $M(z)$ est appelé l'**image** de z dans $\mathcal{P}$.
Réciproquement, à tout point M du plan, repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on fait correspondre le nombre complexe $z = x + iy$. z est appelé l'**affixe** de M.



D'après le **Théorème** 2.2, ce procédé établit une correspondance "*point par point*" entre les nombres complexes d'une part et les points du plan d'autre part. Elle permet donc de *représenter* les nombres complexes dans le plan affine. Muni de cette correspondance "*point par point*", $\mathcal{P}$ est appelé le **plan complexe**.

Exercice : Où se trouvent les images des nombres réels dans le plan complexe ? des imaginaires purs ?

5 Opérations algébriques dans C

Nous allons vérifier dans ce paragraphe que les règles de calcul usuelles dans $\mathbf{R}$ et le **Théorème** 2.1 permettent, grâce à la notation algébrique des nombres complexes de retrouver toutes les opérations algébriques dans $\mathbf{C}$ et de conduire très facilement des calculs dans $\mathbf{C}$.

5.a Addition des nombres complexes

Proposition 2.5.— Propriétés de l'addition
- L'addition des nombres complexes prolonge l'addition des nombres réels dans le sens que pour tous nombres réels x et x', on a : $(x + i0) + (x' + i0) = (x + x') + i0$

De plus, pour tous nombres complexes z, z', z'' , on a :
- $z + z' = z' + z$. L'addition est **commutative**.
- $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$. L'addition est **associative**.
- $z + 0 = z$. 0 est **élément neutre** pour l'addition.

Enfin, tout nombre complexe z possède un **opposé**, noté $-z$. Plus précisément
- si $z = x + iy$ en notation algébrique, $-z = (-x) + i(-y)$

Vocabulaire : *on dit que* $(\mathbf{C}, +)$ *est un* ***groupe commutatif***.

Démonstration ▽
Ces propriétés découlent directement de celles de l'addition des réels. ▲

Interprétation géométrique :
L'addition des nombres complexes s'interprète aisément dans le plan complexe : il s'agit simplement de l'addition des vecteurs.

5.b Multiplication des nombres complexes

Proposition 2.6.— Propriétés de la multiplication

- La multiplication des nombres complexes prolonge la multiplication des nombres réels dans le sens que pour tous nombres réels x et x', on a : $(x+i0)\times(x'+i0)=(x\times x')+i0$.

De plus, pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

- $z\times z' = z'\times z$. La multiplication est **commutative**.
- $(z\times z')\times z'' = z\times(z'\times z'')$. La multiplication est **associative**.
- $(z\times z')+(z\times z'')=z\times(z'+z'')$. La multiplication est **distributive** sur $+$.
- $z\times 1 = z$. 1 est **élément neutre** pour la multiplication.

Enfin, tout nombre complexe non nul z possède un **inverse**, noté $\dfrac{1}{z}$ ou z^{-1}. Plus précisément

- si $z=x+iy$ est un nombre complexe non nul présenté sous forme algébrique,

$$\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Vocabulaire : *on dit que* $(\mathbf{C},+,\times)$ *est un* ***corps***.

Démonstration $\triangledown$

- $(x+i0)\times(x'+i0)=xx'-0.0+i(x\times 0+x'\times 0)=xx'+i0$.
- Il suffit de remarquer que la formule $(x+iy)\times(x'+iy')=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$ est symétrique en *pas prime* et *prime*.
- Développons le produit $(z\times z')\times z''$ en notation algébrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\big((x+iy)\times(x'+iy')\big)\times(x''+iy'') &= ((xx'-yy')+i(xy'+x'y))\times(x''+iy'')\\ &= (x''(xx'-yy')-y''(xy'+x'y))+i\,(x''(xy'+x'y)+y''(xx'-yy'))\\ &= (xx'x''-x'yy''-xy'y''-x''yy')+i\,(x'x''y+xx''y'+xx'y''-yy'y'')\,.\end{aligned}$$

  Sous cette forme, il apparaît plus[4] clairement que le produit $(z\times z')\times z''$ est égal $z\times(z'\times z'')$. Si vous n'êtes pas convaincu, vérifiez-le par vous-même ;-)
- En notation algébrique, nous avons

$$\begin{aligned}(x+iy)\times((x'+iy')+(x''+iy'')) &= (x+iy)\times((x'+x'')+i(y'+y''))\\ &= (x(x'+x'')-y(y''+y'))+i\,(x(y''+y')+y(x'+x''))\\ &= (xx'+xx''-yy''-yy')+i\,(xy''+xy'+yx'+yx'')\\ &= ((xx'-yy')+i(xy'+yx'))+((xx''-yy'')+i(xy''+yx''))\\ &= z\times z'+z\times z''.\end{aligned}$$

- Soit $z=(x,y)\in\mathbf{C}$ tel que $(x,y)\neq(0,0)$, c'est-à-dire que x et y ne sont pas tous les deux nuls. Par conséquent $x^2+y^2>0$ et l'élément $\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ est bien défini. De plus

$$\begin{aligned}(x+iy).\left(\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{x^2-y\times(-y)}{x^2+y^2}+i\frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+i0=1+i0=1\end{aligned}$$

▲

Interprétation géométrique : reportez-vous à la prochaine partie du chapitre !

4. ou moins

5.c Conséquences

1. Les propriétés de l'addition et la multiplication des nombres complexes permettent d'effectuer le calcul d'un produit de nombres complexes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(x+iy)\times(x'+iy') &= x.x' + i\ xy' + i\ yx' + (i)^2\ yy' \\ &= xx' - yy' + i\ (xy' + x'y)\end{aligned}$$

Il n'est donc pas nécessaire[5] de retenir la formule du produit de deux nombres complexes en notation algébrique.

2. À présent que nous savons que tout nombre complexe non nul possède un inverse, nous pouvons reprendre la démonstration de l'expression de l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = x+iy$ en utilisant l'identité remarquable $(z+z')\times(z-z') = z^2 - z'^2$, il vient

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\ (x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

3. D'autres formules sont valables pour les calculs en nombres complexes, citons par exemple la **formule du binôme de Newton** et l'**identité géométrique** :

Théorème 2.7.— Pour tous $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ et $n \in \mathbf{N}$:

- $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k \times b^{n-k}$
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Exercice : Présentez sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{3+6i}{3-4i}$.

6 Conjugaison

Pour le calcul de l'inverse ci-dessus, nous avons multiplié le nombre complexe $z = x+iy$ par sa **quantité conjuguée** $x - iy$ pour faire apparaître au dénominateur $(x)^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$. Ceci conduit à adopter la définition suivante :

Définition : Nombre complexe conjugué —. *Soit $z = x+iy$, un nombre complexe présenté sous forme algébrique. On définit le **conjugué** $\bar{z}$ de z par :*

$$\bar{z} = x - iy = \mathfrak{Re}\, z - i\mathfrak{Im}\, z.$$

*L'application γ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui à tout nombre complexe associe son conjugué est appelée **conjugaison**.*

Interprétation géométrique : le conjugué $\bar{z}$ de z a pour image dans le plan complexe le point symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

Proposition 2.8.— Propriétés de la conjugaison —. Soit $(z,z') \in \mathbf{C}^2$ un couple de nombres complexes. Alors

1. $\bar{1} = 1$.
2. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
3. $\overline{z.z'} = \bar{z}\bar{z}'$.
4. $\bar{\bar{z}} = z$.
5. si de plus $z \neq 0$, $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$
6. si de plus $z' \neq 0$, $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$

Commentaires : la conjugaison est compatible avec toutes les opérations dans $\mathbf{C}$!

5. mais néanmoins utile

Démonstration ▽
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Par définition de la conjugaison, il vient :

1. trivial.
2. $\overline{z + z'} = \overline{(x + x') + i(y + y')} = (x + x') - i(y + y') = (x - iy) + (x' - iy') = \bar{z} + \bar{z}'$.
3. $$\begin{array}{rcl} \overline{z.z'} & = & \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y) \\ \bar{z}.\bar{z}'. & = & (x - iy).(x' - iy') = (xx' - yy') - i(xy' + x'y) \end{array}$$
4. $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.
5. Supposons que z soit un élément non nul (*i.e.* inversible) de $\mathbf{C}$. Montrons que $\bar{z}$ est non nul et que son inverse est le conjugué de l'inverse de z. D'après le 1. et le 5.
$$1 = \bar{1} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$
Ceci prouve d'une part que $\bar{z}$ est non nul, c'est-à-dire inversible et d'autre part que son inverse est $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.
6. Finalement lorsque $z \in \mathbf{C}$ est quelconque, il suffit d'appliquer le 3. et le 5. pour voir que :
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z.\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z}.(\frac{1}{\bar{z}'}) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$$

▲

On peut exprimer facilement parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe à l'aide du conjugué :

Proposition 2.9.— Soit $z \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Alors

$$\boxed{\blacksquare\ \mathfrak{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \blacksquare\ \mathfrak{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Par conséquent, nous avons les équivalences suivantes : $\begin{array}{ccc} z \in \mathbf{R} & \Longleftrightarrow & \bar{z} = z \\ z \in i\mathbf{R} & \Longleftrightarrow & \bar{z} = -z \end{array}$.

Démonstration ▽
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe présenté sous forme algébrique, c'est-à-dire $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Par définition, $\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x + iy \\ \bar{z} & = & x - iy \end{array} \right.$ soit encore : $\left\{ \begin{array}{rcl} z + \bar{z} & = & 2x \\ z - \bar{z} & = & 2iy \end{array} \right.$.

D'où je tire : $\mathfrak{Re}\, z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\mathfrak{Im}\, z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
Finalement, nous avons les équivalences

$$\begin{array}{ccc} z \in \mathbf{R} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{Im}\, z = 0 \Longleftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow \bar{z} = z, \text{ et} \\ z \in i\mathbf{R} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{Re}\, z = 0 \Longleftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow \bar{z} = -z, \end{array}$$

ce qui achève la démonstration de cette proposition. ▲

II Notation exponentielle des nombres complexes

Le but de cette partie du chapitre est de donner une interprétation géométrique au produit de deux nombres complexes. Cette interprétation se fera grâce aux notions de **module** et **arguments**.

1 Module d'un nombre complexe

1.a Définition

Proposition-Définition 2.10.— Soit $z \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Le produit $z.\bar{z}$ est un nombre réel positif. On définit le **module** du nombre complexe z, et on note $|z|$ le nombre **réel positif** :

$$\boxed{|z| = \sqrt{z.\bar{z}}}$$

Démonstration $\triangledown$
Il faut démontrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $z.\bar{z}$ est réel positif. Pour cela, utilisons l'écriture algébrique de z. Il existe des nombres réels x et y (uniques) tels que $z = x + iy$. Appliquons l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, valable dans $\mathbf{C}$ comme rappelé dans le paragraphe **Opérations algébriques**. Il vient :

$$z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

D'où l'on tire que $z.\bar{z}$ est réel et positif. ▲

On déduit de la preuve ci-dessus :

Corollaire.— Expression du module en notation algébrique —. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe sous forme algébrique, alors

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Remarque : lorsque z est réel, son module coïncide avec sa valeur absolue.

Interprétation géométrique : Soit $z \in \mathbf{C}$ et $\vec{V}(z)$ le vecteur d'affixe z. Rappelons que $\vec{V}(z) = \overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ désigne l'image de z. Il est clair, d'après le corollaire ci-dessus que :

$$|z| = \parallel \vec{V}(z) \parallel = \parallel \overrightarrow{OM(z)} \parallel .$$

1.b Propriétés premières du module

Proposition 2.11.— Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ un couple de nombres complexes. Alors

1. $|z| = |\bar{z}|$.
2. $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.
3. $|z.z'| = |z|\,|z'|$.
4. si de plus $z' \neq 0$, alors $|z/z'| = |z|/|z'|$.

Démonstration $\triangledown$

1. La multiplication dans $\mathbf{C}$ étant commutative, nous avons $|z|^2 = z.\bar{z} = \bar{z}.z = |\bar{z}|^2$.
2. Écrivons z sous forme algébrique. La propriété résulte immédiatement du corollaire ci-dessus.
3. Calculons les carrés des quantités proposées. D'après la **Proposition** 2.8, la commutativité et l'associativité de la multiplication des nombres complexes, nous obtenons :
$$|z.z'|^2 = (z.z').\overline{(z.z')} = z.z'\,\bar{z}.\bar{z}' = (z.\bar{z}).(z'.\bar{z}') = |z|^2.|z'|^2.$$
Le résultat en découle en prenant les racines carrées.
4. Comme $z' \neq 0$, nous pouvons appliquer le 4. à z/z' et z'. Il en résulte $|z'.\frac{z}{z'}| = |z'|.|\frac{z}{z'}|$, c'est-à-dire
$$|z| = |z'|.|\frac{z}{z'}|.$$
Comme $z' \neq 0$, son module est strictement positif d'après le 3. Divisant cette dernière égalité par $|z'|$, nous obtenons le résultat annoncé. ▲

Exercice : Montrez que pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}^\star$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

1.c Inégalités triangulaires

C n'étant pas muni d'ordre compatible, nous utilisons l'ordre sur **R** pour comparer non pas les nombres complexes, mais leurs modules ou leurs parties réelles et imaginaires –qui sont tous des réels. Le premier résultat en ce sens est le **Lemme** suivant :

Lemme 2.12.— Soit $z \in \mathbf{C}$, alors

$$\max\{|\mathfrak{Re}\, z|, |\mathfrak{Im}\, z|\} \leq |z| \leq |\mathfrak{Re}\, z| + |\mathfrak{Im}\, z|$$

Démonstration ▽
Écrivons z sous forme algébrique $z = x + iy$, de sorte que $|z|^2 = x^2 + y^2$. Les trois membres de cet encadrement étant des réels strictement positifs, il suffit [6] de comparer leurs carrés. Il apparaît alors clairement que

$$\max\{x^2, y^2\} \leq |z|^2 \leq (|x| + |y|)^2.$$

On conclut en remarquant que l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, de sorte que $\max\{x^2, y^2\} = (\max\{|x|, |y|\})^2$. ▲

Comme la valeur absolue dans **R**, le module des nombres complexes sert à construire une *distance* sur **C**. Cette construction repose sur les :

Proposition 2.13.— Inégalités triangulaires —. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ un couple de nombres complexes,

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z - z'| \geq \big||z| - |z'|\big|$

Démonstration ▽
Je ne prouve ici que la première inégalité, la deuxième s'en déduisant comme dans le cas réel.
Les deux membres de cette inégalité étant des réels positifs, comparons leurs carrés :

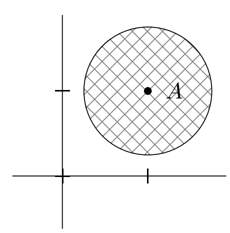
$$\begin{aligned}
(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2|z.z'| + |z'|^2 - (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\
&= |z|^2 + 2|z.z'| + |z'|^2 - \big(z.\bar{z} + z.\bar{z}' + z'.\bar{z} + z'.\bar{z}'\big) \\
&= |z|^2 + 2|z.z'| + |z'|^2 - \big(|z|^2 + (z.\bar{z}').\overline{(z.\bar{z}')} + |z'|^2\big) \\
&= 2\big(|z.z'| - \mathfrak{Re}\,(z.\bar{z}')\big) \\
&\geq 0 \qquad \text{d'après le } \textbf{Lemme } 2.12.
\end{aligned}$$

▲

Interprétation géométrique :

Comme le module de z représente la longueur du vecteur d'affixe z, le module de $z - a$ représente la distance entre les points d'affixes z et a.
En particulier le disque ouvert de centre $A(a)$ et de rayon $R > 0$ est l'image dans le plan complexe de l'ensemble

$$D(a; R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < R\}$$



2 Nombres complexes de module 1

Dans ce paragraphe, nous étudions l'ensemble, noté **U**, des nombres complexes de module 1.

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

La notation est justifiée car l'image de **U** dans la plan complexe est le **cercle Unité**. **U** possède des propriétés de stabilité fort intéressantes pour le produit des nombres complexes.

6. c'est quand même chouette un ordre compatible avec la structure de corps !

- d'après la **Proposition** 2.11, le produit de deux nombres complexes de module 1 est encore de module 1.
- l'inverse ou le conjugué d'un élément de **U** est encore dans **U**.

Ces propriétés expliquent le rôle essentiel de **U** pour l'interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes.

Exercice : Soit $z \in \mathbf{U}$ un nombre complexe de module 1. Montrez que $z^{-1} = \bar{z}$.

2.a Représentation des nombres complexes de module 1

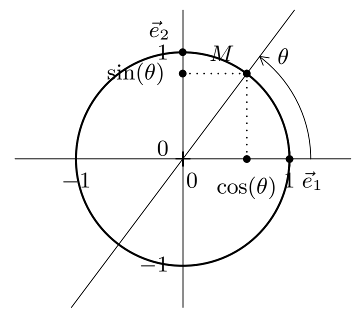
Définition : Exponentielle imaginaire pure d'angle θ —. *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On appelle **exponentielle imaginaire d'angle** θ, et on note $e^{i\theta}$, le nombre complexe*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Exemple : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$

Remarque : ne exponentielle imaginaire est un nombre complexe de module 1 car $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Illustration : l'image de $e^{i\theta}$ dans le plan complexe est le point M du cercle unité repéré par l'angle θ.



Théorème 2.14.— Représentation des nombres complexes de module 1—. Soit $z \in \mathbf{U}$, nombre complexe de module 1.

- Il **existe** $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- **Il n'y a pas unicité** de l'angle θ : pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ de réels

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ \ [2\pi]$$

Notation : *On note $\theta' \equiv \theta[2\pi]$ la relation : "il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$". On dit alors que θ' est **congru** à θ **modulo** 2π.*

Commentaires : tout nombre complexe $z \in \mathbf{U}$, s'écrit sous la forme $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, l'angle θ étant unique à 2π près.

Démonstration $\triangledown$

- **Existence** Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module 1 présenté ici sous forme algébrique. Ainsi $x^2 + y^2 = 1$. Comme vous le savez ceci suffit à garantir l'existence d'un nombre réel θ tel que

$$\begin{array}{rcl} x & = & \cos\theta \\ y & = & \sin\theta \end{array}$$

  Autrement dit $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
- **Défaut d'unicité** Le résultat découle des équivalences suivantes :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta' + i\sin\theta' \iff \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{array} \right. \iff \theta \equiv \theta' \ \ [2\pi]$$

$\blacktriangle$

2.b Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire

Théorème 2.15.— Pour tout couple $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ de nombres réels,

1. $e^{i0} = 1$.
2. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
3. $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$
4. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

Commentaires : ainsi, l'exponentielle imaginaire d'une somme est le produit des exponentielles imaginaires.

Vocabulaire : *on dit que la fonction exponentielle imaginaire est un morphisme du groupe additif* $(\mathbf{R}, +)$ *vers le groupe multiplicatif* $(\mathbf{U}, \times)$.

Démonstration $\triangledown$
Soit θ et θ' deux nombres réels.

1. $e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$.
2. Pour calculer $e^{i(\theta+\theta')}$, j'utilise les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques. Il vient :

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \big(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\big) + i\big(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta\big) \\ &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big) \times \big(\ cos\theta' + i\sin\theta'\big) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \end{aligned}$$

3. On applique la propriété précédente au couple $(\theta-\theta', \theta')$. Il vient

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= e^{i(\theta-\theta'+\theta')} \\ &= e^{i(\theta-\theta')} \times e^{i\theta'} \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $e^{i\theta'}$ le résultat en découle.

4. Appliquons la propriété précédente au couple $(0, \theta)$. Nous obtenons directement $e^{-i\theta} = e^{i(0-\theta)} = e^{i0}/e^{i\theta} = 1/e^{i\theta}$. Finalement, comme $z = e^{i\theta}$ est un complexe de module 1, son inverse est égal à son conjugué (car $z\bar{z} = 1$). ▲

2.c Formules d'Euler

Appliquée au nombre complexe $e^{i\theta}$, la **Proposition** 2.9 donne la proposition suivante, connue sous le nom de :

Théorème 2.16.— Formules d'Euler —. Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbf{R}$,

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration $\triangledown$
Posons $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, calculons tout d'abord son conjugué. Il vient

$$\begin{aligned} z &= \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \bar{z} &= \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la **Proposition** 2.9 au nombre complexe z pour obtenir le résultat. ▲

2.d Formules de Moivre

En appliquant la **Proposition** 2.15 pour calculer les puissances du nombre complexe $e^{i\theta}$, nous obtenons le résultat suivant, connu sous le nom de :

Théorème 2.17.— Formules de Moivre —. Pour tout nombre réel $\theta \in \mathbf{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbf{Z}$,

- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\big(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Warning : on n'a pas $\cos^n(\theta) = \cos(n\theta)$ ni $\sin^n(\theta) = \sin(n\theta)$.

Démonstration $\triangledown$

- Soit $\theta \in \mathbf{R}$ fixé, montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.
  - **Initialisation :** lorsque $n = 0$, $1 = \left(e^{i\theta}\right)^0$ et $e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Montrons que $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$. Pour cela, utilisons tout d'abord la **Proposition** 2.15, avec $\theta' = n\theta$, il vient :
$$e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{in\theta}e^{i\theta}.$$
Or, par hypothèse de récurrence, $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$. Il s'ensuit que
$$e^{i(n+1)\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}.$$
- **Conclusion :** nous avons prouvé par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

■ Lorsque $n \in \mathbf{Z}^-$ est un entier strictement négatif, $-n \in \mathbf{N}$. Ainsi, avec le résultat précédent, il vient :
$$e^{in\theta} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^{-n}} = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

▲

3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

3.a Représentation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$ un nombre complexe non nul. Nous allons représenter z à l'aide de son module et de l'angle formé par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\overrightarrow{V}(z)$, où $\overrightarrow{V}(z)$ dénote le vecteur d'affixe z.

Proposition 2.18.— Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul —. Soit $z \in \mathbf{C}^\star$ un nombre complexe non nul.

■ Il **existe** un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$

■ Il n'y a **pas unicité** de l'écriture exponentielle :
Pour tous couples $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, $(\rho', \theta') \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, nous avons l'équivalence :
$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \rho &= \rho' \\ \theta' &\equiv \theta'[2\pi] \end{cases}.$$

Vocabulaire : *pour être plus précis, on appelle **écriture exponentielle** de z, la forme $\rho e^{i\theta}$ et **écriture trigonométrique** la forme $\rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$.*

Démonstration ▽

- **Existence :** soit $z \in \mathbf{C}^\star$, le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$ a pour module 1. Or d'après le théorème de représentation des nombres complexes de module 1 (**Proposition** 2.14) il existe un nombre réel $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $(z/|z|) = \varphi(\theta)$, c'est-à-dire :
$$z = |z|\, e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$
- **Défaut d'unicité :** soit $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, $(\rho', \theta') \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$, tels que
$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \tag{2.1}$$
En ce cas, ces deux complexes ont même module. Or, d'après les propriétés du module $|\rho e^{i\theta}| = |\rho| = \rho$ et $|\rho' e^{i\theta'}| = \rho'$. Ainsi, $\rho = \rho'$.
Comme $\rho > 0$, il est simplifiable dans (2.1). Il s'ensuit que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, ce qui n'est possible que si $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$.

Réciproquement, il est clair que si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$, on a bien $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$. ▲

En pratique : l'approche présentée ici est constructive, cela signifie que lorsque vous aurez besoin de déterminer l'expression exponentielle d'un nombre complexe z non nul, il vous faudra reprendre les étapes suivantes :

$\boxed{1}$ déterminez le module $\rho = |z|$ de z.

$\boxed{2}$ factorisez z par son module : $z = \rho\ \zeta$.

$\boxed{3}$ le nombre $\zeta = z/|z|$ a pour module 1 : il s'écrit $\zeta = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$. *À vous de reconnaître θ !!*

$\boxed{4}$ concluez $z = \rho\, e^{i\theta}$.

Exercice : Présentez sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

3.b Arguments d'un nombre complexe non nul

En écriture exponentielle, le nombre positif ρ est déterminé de manière unique, par conséquent si $z = \rho e^{i\theta}$, alors nécessairement $\rho = |z|$. En revanche, le réel θ donné par la **Proposition** 2.18 ci-dessus n'est pas unique. Au contraire, il existe une infinité de réels θ' tels que $z = |z|e^{i\theta'}$:

Définition : *Soit $z \in \mathbf{C}^\star$, on appelle* ***un argument*** *de z tout réel θ tel que*

$$z = |z|e^{i\theta}$$

On note $\mathsf{arg}\,(z)$ ***un argument quelconque*** *de z.*

Avec ces notations, z s'écrit d'après la **Proposition** 2.18 $z = |z|\; e^{i\mathsf{arg}\,(z)}$. La partie *unicité* s'énonce de la manière suivante :

Théorème 2.19.— Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$ de nombres complexes non nuls

$$\boxed{(z = z') \iff \begin{cases} \bullet & |z| = |z'| \\ \bullet & \mathsf{arg}\,(z) \equiv \mathsf{arg}\,(z')\,[2\pi] \end{cases}}$$

Commentaires : en clair, deux nombres complexes non nuls sont égaux *si et seulement si* ils ont même module et mêmes arguments.

Exercice : Déterminez les sous-ensembles de $\mathbf{C}$, *décrits en compréhension,* qui suivent :

$$\{z \in \mathbf{C}^\star \;|\; \mathsf{arg}\,(z) \equiv 0\,[2\pi]\}, \{z \in \mathbf{C}^\star \;|\; \mathsf{arg}\,(z) \equiv 0\,[\pi]\}, \{z \in \mathbf{C}^\star \;|\; \mathsf{arg}\,(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\}.$$

Exercice : Donnez un argument de $-5e^{i\pi/4}$

Proposition 2.20.— Propriétés des arguments
Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$ un couple de nombres complexes non nuls et $n \in \mathbf{Z}$ un entier. Alors

1.	$\mathsf{arg}\,(z.z') \equiv \mathsf{arg}\,(z) + \mathsf{arg}\,(z')\;[2\pi]$	**3.**	$\mathsf{arg}\,(\bar{z}) \equiv -\mathsf{arg}\,(z)\;[2\pi]$
2.	$\mathsf{arg}\,(z/z') \equiv \mathsf{arg}\,(z) - \mathsf{arg}\,(z')\;[2\pi]$	**4.**	$\mathsf{arg}\,(z^n) \equiv n\,\mathsf{arg}\,(z)\;[2\pi]$

Démonstration ▽
Montrons le **1.** les autres assertions s'en déduisent immédiatement :
Soit θ et θ' des arguments de z et z' respectivement. Par définition, z et z' s'écrivent sous forme exponentielle :

$$z = |z|e^{i\theta} \text{ et } z' = |z'|e^{i\theta'}.$$

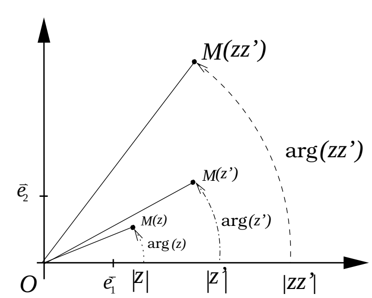
En utilisant les **Proposition** 2.11 et 2.15, il vient

$$z.z' = |z||z'|e^{i\theta}.e^{i\theta'} = |z.z'|e^{i(\theta+\theta')}.$$

Par définition, cela signifie que $\theta + \theta'$ est un argument de $z.z'$, *i.e.* $\mathsf{arg}\,(z.z') \equiv \theta + \theta'\;[2\pi]$. ▲

3.c Interprétation géométrique de la multiplication des nombres complexes non nuls

Nous avons vu que l'addition des nombres complexes s'interprète géométriquement comme l'addition des vecteurs du plan. La multiplication des nombres complexes par un nombre complexe a donné s'interprète comme la composée d'une homothétie de centre O et de rapport $|a|$ et de la rotation de centre O et d'angle $\mathsf{arg}\,a$. Une telle transformation du plan est appelée une **similitude directe**.



Corollaire 2.21.— Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^\star \times \mathbf{C}^\star$ un coupe de nombres complexes non nuls. Le produit zz' est l'unique nombre complexe tel que

$$\begin{cases} |zz'| &= |z||z'| \\ \arg(zz') &\equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$$

Commentaires : en clair, pour multiplier deux nombres complexes non nuls présentés sous forme exponentielle, vous multipliez les modules et additionnez les arguments !

Démonstration ▽
Posons $w = zz'$. D'après les **Proposition** 2.11 et 2.20 $|w| = |z||z'|$ et $\arg(w) \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$. L'unicité résulte de la **Proposition** 2.18. ▲

4 La fonction exponentielle complexe

Définition : *Soit $z = x + iy$ en notation algébrique. On définit l'**exponentielle de z** par :*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i \sin y\big).$$

*Le procédé, $z \mapsto e^z$ définit une application, appelée **exponentielle complexe**. On la note*

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C}^\star \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$$

Commentaires : e^z est donc défini[7] par $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) \equiv y\ [2\pi]$. En particulier, si z est réel $(y = 0)$, on retrouve l'exponentielle réelle. Dans le cas général, vous pouvez noter que, son module étant strictement positif, e^z n'est jamais nul. ☺

Proposition 2.22.— La fonction exponentielle est un morphisme de groupes
Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ de nombres complexes :

$$\boxed{e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}}$$

Vocabulaire : *pour qualifier cette très jolie formule de transformation de somme en produit, on dit que la fonction exponentielle est un **morphisme du groupe additif** $(\mathbf{C}, +)$ **dans le groupe multiplicatif** $(\mathbf{C}^\star, \times)$.*

Démonstration ▽
Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes en notation algébrique. Par définition de exp, il vient

$$\begin{aligned} \exp(z + z') &= \exp\big((x + x') + i(y + y')\big) = e^{x+x'}.e^{i(y+y')} \\ &= e^x.e^{x'}.e^{iy}.e^{iy'} = e^x.e^{iy}e^{x'}e^{iy'} \\ &= e^z\ e^{z'}. \end{aligned}$$

▲

Exercice : Soit $a \in \mathbf{C}^\star$. Résolvez dans $\mathbf{C}$ l'équation $e^z = a$

Solution ▽
Soit $a = \rho e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul en notation trigonométrique ($\rho > 0$) et $z = x + iy$ un nombre complexe présenté sous forme algébrique (x, y réels) fixés. D'après la **Proposition** *2.18, nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} e^z = a \quad &\iff \quad e^{(x+iy)} = \rho e^{i\alpha} \iff \begin{cases} |e^{(x+iy)}| = e^x = \rho \\ y \equiv \alpha\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln \rho \\ \text{il existe } k \in \mathbf{Z};\ y = \alpha + 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \quad \text{il existe } k \in \mathbf{Z};\ z = \ln(\rho) + i(\alpha + 2k\pi). \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{\ln(|a|) + i(\alpha + 2k\pi)\ ; k \in \mathbf{Z}\}$$

Ceci prouve que pour tout $a \in \mathbf{C}^\star$, l'équation $e^z = a$ possède, non seulement au moins une solution, mais en fait une infinité ! ▲

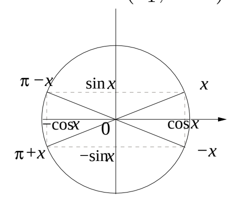
7. de manière unique

5 Applications à la trigonométrie ❤

5.a Le cercle trigonométrique

Rappelons tout d'abord les constructions géométriques des fonctions sin, cos et tan :
Soit M un point du cercle trigonométrique, repéré par un angle $x \in \mathbf{R}$: $x \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$.
On définit

- $\cos(x) = \overline{OH}$
- $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



Remarque : lorsque x est augmenté d'un multiple entier de 2π, on retouve le même point M. Ainsi, les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, la fonction tangente est π-périodique.

Comme M est sur le cercle trigonométrique, on a

Théorème 2.23.— Relations fondamentales de trigonométrie circulaire —. Soit $x \in \mathbf{R}$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, si $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

5.b Tableau de valeurs

Le tableau ci-contre donne quelques valeurs remarquables des fonctions sin, cos et tan. La fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$. En effet, lorsque x vaut $\frac{\pi}{2}$, la droite (OM) et la perpendiculaire à l'axe $(O\vec{e}_1)$ issue de A sont parallèles et par conséquent, le point d'intersection T n'est pas défini.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

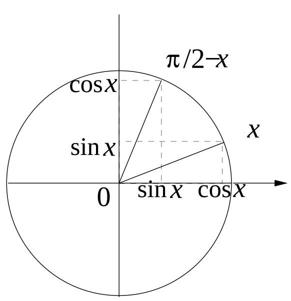
5.c Propriétés de symétrie

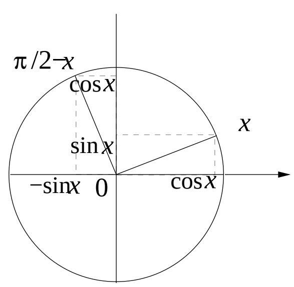
Ce tableau de valeurs peut être étendu au moyen des remarquables propriétés de périodicité, parité et autres symétries qui suivent :

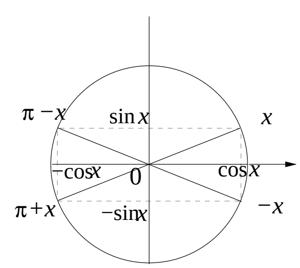
Corollaire.— Symétries —. Les fonctions sin et cos vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$
- $\sin(x + \pi/2) = \cos x$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

Illustration : on peut visualiser ces symétries sur le cercle trigonométrique.







5.d Formules d'addition

Les règles de calcul pour la fonction exponentielle imaginaire permettent de retrouver aisément les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques :
Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires de cette identité, il vient :

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b) \text{ et } \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b)$$

Plus généralement, on a :

Proposition 2.24.— Formules d'addition —.

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

En particulier, lorsque $a = b$, nous obtenons :

Proposition 2.25.— formules de duplication —.

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\tan 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

En pratique : ces formules d'addition sont régulièrement utilisées pour transformer $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$ en des polynômes de $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$.

Exercice : Exprimez $\cos(3\theta)$ comme un polynôme de $\cos(\theta)$.

Solution $\triangledown$
On utilise les formules d'addition :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos(\theta)\left[2\cos^2\theta - 1\right] - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos(\theta)\left[2\cos^2\theta - 1\right] - 2\cos(\theta)\left[1 - \cos^2(\theta)\right] \\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$\blacktriangle$

En pratique : les **formules d' Euler** et de **Moivre** permettent aussi de réaliser cette opération :

Exercice :

1. Remarquez que $\cos 4\theta = \mathfrak{Re}\, e^{i4\theta} = \mathfrak{Re} \left(\cos\theta + i \sin\theta\right)^4$.
2. En déduire grâce à la **formule du binôme de Newton** l'expression de $\cos 4\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$.

5.e Formules de linéarisation

On déduit aisément de la **Proposition** précédente les formules suivantes, dites **formules de linéarisation**, qui permettent de transformer un produit de fonctions trigonométriques en une combinaison linéaire de $\sin(k\theta)$ et $\cos(k\theta)$.

Proposition 2.26.— Formules de linéarisation —.

$$\begin{array}{lcl} \blacksquare \quad \cos a \cos b &=& \frac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big] \\ \blacksquare \quad \sin a \sin b &=& \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big] \\ \blacksquare \quad \sin a \cos b &=& \frac{1}{2}\big[\sin(a+b)+\sin(a-b)\big] \end{array}$$

En particulier, lorsque $a = b$, nous obtenons

Corollaire 2.27.—

$$\begin{array}{lcl} \blacksquare \cos^2 a &=& \frac{1}{2}\big[1+\cos 2a\big] \\ \blacksquare \sin^2 a &=& \frac{1}{2}\big[1-\cos 2a\big] \end{array}$$

En pratique : ces formules de linéarisation sont incontournables. Elles sont particulièrement utiles pour le calcul des primitives.

Exercice : Exprimez $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\cos 3\theta$

En pratique : En utilisant la formule du binôme, les **formules d' Euler** et de **Moivre** permettent elles aussi d'exprimer les puissances de $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$.

Exercice : Soit $\theta \in \mathbf{R}$ un nombre réel.

1. Exprimez $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
2. Appliquez la **formule du binôme de Newton** pour obtenir l'expression de $\sin^3\theta$ en fonction des $e^{i\theta}$, $e^{i3\theta}$ et de leurs inverses.
3. Linéarisez $\sin^3\theta$.

5.f Formules de factorisation

Proposition 2.28.— Factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié —. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{array}{l} \blacksquare \quad e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \\ \blacksquare \quad e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{array}$$

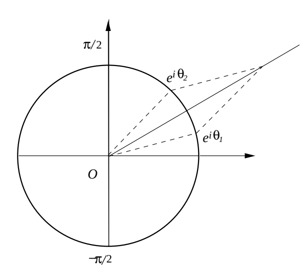
Démonstration $\triangledown$

Dans le cas particulier où les angles θ_1 et θ_2 sont opposés ($\theta_2 = -\theta_1$), la situation est bien meilleure. En effet, d'après la formule d'Euler :

$$e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1} = 2\cos\theta_1 \ !$$

Dans le cas général, une factorisation astucieuse de la somme $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ par l'exponentielle imaginaire d'angle moitié : $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ permet de se ramener au cas simple.

En utilisant les règles de calcul pour l'exponentielle, il vient :



$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{-\theta_1+\theta_2}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \times e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{aligned}$$

$\blacktriangle$

On en déduit

Proposition 2.29.— Transformations de sommes en produits

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \blacksquare\quad \cos p + \cos q & = & 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \cos\dfrac{p+q}{2} \\ \blacksquare\quad \sin p + \sin q & = & 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \sin\dfrac{p+q}{2} \\ \blacksquare\quad \cos p - \cos q & = & -2\sin\dfrac{p-q}{2}\ \sin\dfrac{p+q}{2} \end{array}}$$

Remarque : ces formules s'obtiennent aussi aisément à partir des formules de transformations de produits en somme, au moyen du changement de variable $p = a + b$ et $q = a - b$.

Démonstration $\triangledown$

Montrons les deux premières :

Pour calculer cette somme de fonctions trigonométriques, on passe en complexes. On déduit alors de la factorisation par l'exponentielle de l'angle moitié :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2\cos(\frac{p-q}{2})\ e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Dès lors, il ne reste plus qu'à identifier les parties réelles et imaginaires dans cette égalité pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl} \cos p + \cos q & = & 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \cos\dfrac{p+q}{2} \\ \sin p + \sin q & = & 2\cos\dfrac{p-q}{2}\ \sin\dfrac{p+q}{2} \end{array}$$

La dernière identité est obtenue suivant le même prinicpe en partant de l'égalité $e^{ip} - e^{iq} = 2\,i\,\sin(\frac{p-q}{2})\ e^{i\frac{p+q}{2}}$. ▲

5.g Calculs de sommes

Les formules d'**Euler** et **Moivre** permettent de ramener le calcul de sommes trigonométriques à celui de sommes de nombres complexes. L'application de la **formule du binôme de Newton** ou de l'**Identité géométrique** permet généralement de conclure.

À titre d'exemple, montrons la

Proposition 2.30.— Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. On note $C(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

Alors

$$\boxed{C(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Démonstration $\triangledown$

Plutôt que de calculer directement $C(x)$ et $S(x)$, nous avons intérêt à "**passer en complexes**" : calculons donc

$$E(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

D'après les formules de **Moivre**, l'identité géométrique et les formules d'**Euler**, nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl} E(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\ \frac{e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ & = & \dfrac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}\ e^{inx/2)} \end{array}$$

Finalement, comme $C(x) = \mathfrak{Re}\,E(x)$ et $S(x) = \mathfrak{Im}\,E(x)$ j'obtiens

$$C(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\ \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

▲

III Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe ❤

Les nombres complexes ont été introduits pour résoudre l'équation

$$\boxed{z^2 = -1}$$

en introduisant le nombre imaginaire pur i. Nous allons voir dans cette partie du chapitre que dans $\mathbf{C}$ tout nombre possède des racines $n^{\text{ièmes}}$. Commençons par étudier l'existence des :

1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

1.a Définition des racines n ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on s'intéresse à résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation

$$\boxed{z^n = 1} \tag{2.2}$$

Définition : *Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On appelle **racine** $\mathbf{n}^{\textbf{ième}}$ de l'unité, toute solution de l'équation* (2.2).

Exemple : lorsque $n = 2$, les racines carrées de 1 sont ± 1.

Notation : *on note $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.*

$\mathbf{U}_n$ est non vide, puisque clairement, $1 \in \mathbf{U}_n$. Nous allons démontrer que 1 admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes dans $\mathbf{C}$.

Théorème 2.31.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1—. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Notons $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. L'ensemble $\mathbf{U}_n$ des **racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité** est :

$$\boxed{\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1}\}}$$

Autrement dit, pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$, $z^n = 1 \iff$ il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$, tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Commentaires : ainsi, pour un entier n fixé, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont en fait les puissances successives d'un seul nombre complexe ω_n, que l'on pourrait qualifier de racine $n^{\text{ième}}$ ≪*primitive*≫ de 1.

Remarque : dans $\mathbf{C}$, 1 admet donc n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes.

Vocabulaire : *l'ensemble* $\mathbf{U_n}$ *est appelé le* **groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$** *de 1.*

Démonstration ▽

La preuve sera en deux étapes.

$\boxed{1}$ On résout (2.2). Soit $z \in \mathbf{C}$.

Visiblement, $0 \notin \mathbf{U}_n$, on peut donc chercher les solutions z de (2.2) sous forme exponentielle . À l'aide du changement d'inconnue $z = \rho e^{i\theta}$, on obtient

Soit $z \in \mathbf{C}^\star$. D'après la **Proposition** 2.18, il existe $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. En utilisant le **Théorème** 2.19, nous obtenons :

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} z = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R} \\ \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \rho > 0 \\ \rho^n . e^{in\theta} = e^{i0} \end{cases} \iff \begin{cases} z = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \rho > 0 \\ \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \rho > 0 \\ \rho = 1 \\ \text{il existe } k \in \mathbf{Z};\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \iff \text{il existe } k \in \mathbf{Z};\quad z = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k.$$

Ainsi, le calcul ci-dessus montre que $\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\}$.

$\boxed{2}$ Finalement, montrons que $\mathbf{U}_n = \{1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1}\}$. Il est clair que $\{1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1}\} \subset \{\omega_n^k;\ k \in \mathbf{Z}\}$. Montrons l'autre inclusion :

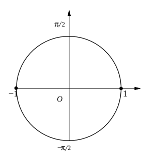
Soit $k \in \mathbf{Z}$, et montrons que $\omega_n^k \in \{1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$. Pour cela, effectuons la division euclidienne de k par n. Il existe donc un couple $(q, r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ unique tel que $\begin{cases} k = nq + r \\ 0 \leq r \leq n-1 \end{cases}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \omega_n^k &= \omega_n^{nq+r} = \omega_n^{nq} \times \omega_n^r \\ &= (\omega_n^n)^q \times \omega_n^r = 1.\omega_n^r \end{aligned}$$

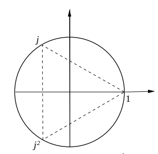
Comme $0 \leq r \leq n-1$, il en résulte que $\omega_n^k \in \{1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$. ▲

1.b Exemples

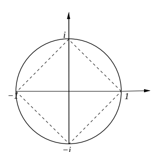
■ **Lorsque n=2** $\omega_2 = e^{i\pi} = -1$.
Le groupe des racines carrées de 1 se réduit à $\mathbf{U}_2 = \{-1, 1\}$.



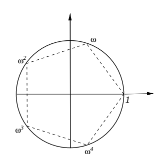
■ **Lorsque n=3** $\omega_3 = e^{2i\pi/3}$.
L'usage est de noter $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a alors $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.



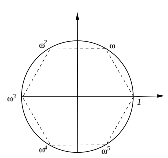
■ **Lorsque n=4** $\omega_4 = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$.
En ce cas, le groupe des racines quatrièmes de l'unité est : $\mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.



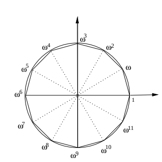
■ **Lorsque n=5** $\omega_5 = e^{2i\pi/5}$.
$\mathbf{U}_5 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}\}$.



■ **Lorsque n=6** $\omega_6 = e^{2i\pi/6} = e^{i\pi/3}$.
$\mathbf{U}_6 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{6}}, e^{\frac{4i\pi}{6}}, e^{\frac{6i\pi}{6}}, e^{\frac{8i\pi}{6}}, e^{\frac{10i\pi}{6}}\}$.



■ **Lorsque n=12** $\omega_{12} = e^{2i\pi/12} = e^{i\pi/6}$.



1.c Propriétés des racines n ièmes de l'unité

Comme l'illustrent clairement les graphiques ci-dessus, les racines troisièmes de 1 forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité, les racines quatrièmes de 1 forment quant à elles un carré, les racines cinquièmes forment un pentagone régulier. Il s'agit d'un fait tout à fait général :

Proposition 2.32.— Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Les images dans le plan complexe des n racines de l'unité sont les sommets d'un polygone convexe régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Démonstration ▽
Notons A_k, $0 \leq k \leq n-1$ les points d'affixes $\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$. Les ω^k sont des nombres complexes de module 1, par conséquent les A_k sont sur le cercle unité. De plus, calculons la mesure algébrique de l'angle $(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}})$, par les propriétés de $\arg$, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}})} &\equiv \overline{(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_{k+1}})} - \overline{(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_k})}\ [2\pi] \equiv \arg(\omega_n^{k+1}) - \arg(\omega_n^k)\ [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{\omega_n^{k+1}}{\omega_n^k}\right) [2\pi] \equiv \arg(\omega_n) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{aligned}$$

Par conséquent les angles à l'origine entre deux sommets consécutifs sont égaux : A_{k+1} se déduit donc de A_k par rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. ▲

Proposition 2.33.— Somme des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité —. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Posons $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors

$$\boxed{\text{La somme des } n \text{ racines } n^{\text{ièmes}} \text{ de l'unité est nulle : } \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0}$$

Démonstration ▽

Pour tout nombre complexe q , l'**identité géométrique** donne $1 - q^n = (1-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$. Appliquons cette formule à ω_n. Comme ω_n est une racine $n^{\text{ième}}$ de 1, il vient $0 = (1-\omega_n)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^k$. Comme de plus $n \geq 2$, $\omega_n \neq 1$, par conséquent nous pouvons diviser cette dernière égalité par $(1-\omega_n)$ pour obtenir le résultat. ▲

Exercice : Produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 —. Soit $n \geq 2$. On note $\omega_n = e^{2i\pi/n}$. Montrez que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\omega_n^k = (-1)^{n-1}$.

Solution ▽

$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\omega_n^k = \omega^{0+1+2+\cdots+n-1} = \omega_n^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$. ▲

2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque

Comme nous l'avons revu au **Chapitre 1**, un nombre réel positif $a \in \mathbf{R}^+$ possède une unique racine $n^{\text{ième}}$ positive, notée $\sqrt[n]{a}$. À présent, intéressons-nous à l'existence de racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque.

Définition : *Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $a \in \mathbf{C}$. On appelle **racine n^{ième}** de a, toute solution complexe de l'équation :*

$$z^n = a \tag{2.3}$$

Remarque : si $a = 0$, alors la seule solution de (2.3) est 0, si $a = 1$, les solutions de (2.3) sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Théorème 2.34.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ de a —. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ et $a = |a|e^{i\arg(a)} \in \mathbf{C}^\star$ présenté sous forme exponentielle.

- Soit $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{n}}$, $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Alors
- ζ_0 est une racine $n^{\text{ième}}$ de a et l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\zeta_0, \zeta_0\omega_n, \ldots, \zeta_0\omega_n^{n-1}\right\} = \left\{\sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a+2\pi}{n}},\ \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a+4\pi}{n}}, \ldots,\ \sqrt[n]{|a|}\,e^{i\frac{\arg a+2(n-1)\pi}{n}}\right\}}$$

Commentaires : Ainsi un nombre complexe non nul a admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes. On obtient **toutes** les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $a \in \mathbf{C}^\star$ en multipliant **une** racine $n^{\text{ième}}$ ζ_0 de a par **toutes** les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Démonstration ▽

- Posons $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{n}}$. Il découle aisément de la formule de Moivre que $\zeta_0^n = \left(\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{n}}\right)^n = |a|e^{i\arg(a)} = a$. Par conséquent, ζ_0 est bien une racine $^{\text{ième}}$ pariculière de a.
- Soit ζ_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de a. Comme a est non nul, on peut effectuer le changement d'inconnue $w = \dfrac{z}{\zeta_0}$ pour résoudre l'équation $z^n = a$. Il vient

$$z^n = a \iff \begin{cases} z = \zeta_0\,w \\ (\zeta_0\,w)^n = a \end{cases} \iff \begin{cases} z = \zeta_0\,w \\ \zeta_0^n\,w^n = a \end{cases} \iff \begin{cases} z = \zeta_0\,w \\ aw^n = a \end{cases} \iff \begin{cases} z = \zeta_0\,w \\ w^n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \zeta_0\,w \\ w \in \mathbf{U}_n \end{cases}$$
$$\iff \text{il existe } k \in \mathbf{Z} \text{ tel que } z = \zeta_0\,\omega_n^k$$

Par suite, l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a est $\mathcal{S} = \{\zeta_0\,\omega_n^k\,;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0,\ \zeta_0\,\omega_n,\ \zeta_0\,\omega_n^2, \ldots,\ \zeta_0\,\omega_n^{n-1}\}$. ▲

Remarque : l'existence de racines $n^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbf{C}$ résulte de l'existence des racines $n^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbf{R}^+$.

En pratique : lorsqu'on vous demande de déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe a, la marche à suivre est la suivante :

$\boxed{1}$ Déterminez l'expression exponentielle de a : $a = |a|e^{i\alpha}$

$\boxed{2}$ Déterminez une racine $n^{\text{ième}}$ ζ_0 particulière de a. Le plus simple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\arg a}{n}}$

$\boxed{3}$ Déterminez[8] les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, c'est-à-dire $\omega_n = e^{i2\pi/n}$ et les puissances de ω_n. Vous obtenez

$$\mathbf{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}$$

De plus, lorsque $n = 2, 3$ ou 4, vous connaissez par coeur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 !

$\boxed{4}$ Multipliez ζ_0 par toutes les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Exercice : Déterminez l'ensemble des racines troisièmes de $a = 8(\sqrt{2} - i\sqrt{6})$.

Solution ▽

$\boxed{1}$ *Calcul de l'écriture exponentielle de* a : $a = 8(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = 16\sqrt{2}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (2\sqrt{2})^3 e^{-i\pi/3}$.

$\boxed{2}$ *Recherche d'une racine cubique particulière :* $\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/9}$.

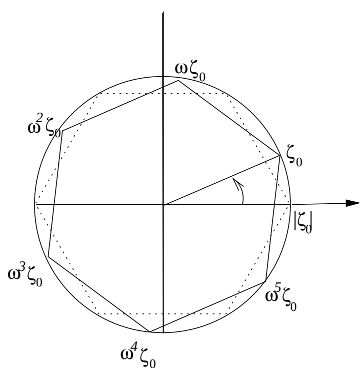
$\boxed{3}$ $\omega_3 = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{4}$ *Les racines cubiques de* a *sont :*

$$\boxed{\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/9}, j\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{5i\pi/9}, j^2\zeta_0 = 2\sqrt{2}e^{11i\pi/9}}$$

▲

Illustration : racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe



3 Calcul des racines carrées en écriture algébrique ❤

Comme cas particulier du **Théorème** 2.34, tout nombre complexe non nul possède **deux racines carrées opposées** :

Si $a = |a|e^{i\arg a}$, alors les racines carrées complexes de a sont $\pm\sqrt{|a|}\, e^{\frac{i}{2}\arg a}$.

Pour déterminer ses racines carrées la méthode précédente suppose la connaissance de l'écriture exponentielle de a, ce qui est rare !

La méthode qui suit permet de déterminer ces racines **sans passer en écriture exponentielle**.

Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe présenté sous forme algébrique. Cherchons ses racines carrées en notation algébrique $z = x + iy$.

$$z^2 = a \iff \begin{cases} z = x + iy \\ x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \end{cases}$$

Le calcul des racines carrées de a revient alors à résoudre ce système.

8. Cette opération prend 10 secondes

En pratique : on rajoute à ce système l'équation obtenue en identifiant les modules. Ainsi avec les notations précédentes :

$$z^2 = a \iff \begin{cases} \bullet \quad x^2 - y^2 &= \alpha \\ \bullet \quad x^2 + y^2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \bullet \quad 2xy &= \beta \end{cases}.$$

Les deux premières équations de ce système permettent de déterminer x et y au signe près, la dernière précise les signes.

Exercice : Calculez les racines carrées de $a = 3 - 4i$.

Solution ▽

Cherchons les racines carrées de a sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = a &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{9+16} \\ 2xy &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 5 \\ 2xy &= -4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x^2 &= 8 \\ 2y^2 &= 2 \\ 2xy &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 &= 4 \\ y^2 &= 1 \\ 2xy &= -4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= \pm 2 \\ y &= \pm 1 \\ 2xy &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \ \textit{et}\ y = -1 \\ \textit{ou} \\ x = -2 \ \textit{et}\ y = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les racines carrées de a sont $2 - i$ et $-2 + i$. ▲

Exercice : Déterminez

- les racines carrées de $b = 9 + 40i$,
- les racines quatrièmes de $c = -7 - 24i$.

IV Application aux équations polynomiales

1 Équations polynomiales de degré 2

1.a Résultat général

Théorème 2.35.— Soit $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, $a \neq 0$. On considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{2.4}$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (2.4).

- si $\Delta \neq 0$, on note δ l'une des racines carrées (complexes) de Δ. Alors (2.4) a deux solutions distinctes $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.
- si $\Delta = 0$, alors (2.4) admet une unique solution complexe, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

De plus, pour tout $z \in \mathbf{C}$, nous avons la factorisation :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration ▽
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et désignons par δ l'une des racines carrées de Δ. Mettons le polynôme $az^2 + bz + c$ sous *forme canonique*, il vient pour tout $z \in \mathbf{C}$

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)$$

Le réultat s'ensuit aisément. ▲

En pratique : pour résoudre l'équation (2.4), la méthode est la suivante :

$\boxed{1}$ y a-t-il une racine évidente, (voir le **Corollaire** 2.36 ci-dessous) ? !

$\boxed{2}$ sinon, calculez $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\boxed{3}$ déterminez une racine carrée complexe δ de Δ. Le calcul se fait souvent en notation algébrique.

$\boxed{4}$ les solutions sont données par les formules du **Théorème**.

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$.

Solution ▽

$\boxed{2}$ $\Delta = (1 + 5i)^2 + 16(1 - i) = -8 - 6i$

$\boxed{3}$ *Cherchons δ sous forme algébrique $\delta = x + iy$. Il vient*

$$\delta^2 = -8 - 6i \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & -8 \\ x^2 + y^2 & = & 10 \\ x \times y & < & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \pm 1 \\ y & = & \pm 3 \\ x \times y & < & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\delta = 1 - 3i$ convient.

$\boxed{4}$ *les solutions sont $z_1 = 2i$, $z_2 = \dfrac{1+i}{2}$.* ▲

Corollaire 2.36.— Système somme-produit —. Soit $(\sigma, \rho) \in \mathbf{C}^2$. Les solutions dans $\mathbf{C}$ du système d'équations $\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{array}\right.$ sont les couples (z_1, z_2) dont les coordonnées z_1 et z_2 sont les solutions complexes de l'équation polynomiale $z^2 - \sigma z + \rho = 0$.

En pratique : ce corollaire est très utile en pratique, notamment pour rechercher les racines évidentes d'un polynôme.

Démonstration ▽
La démonstration est identique à celle donnée au **Chapitre 1**. ▲

1.b Cas particulier d'une équation à coefficients réels

Lorsque les coefficients a, b, c sont réels, les solutions de (2.4) sont réelles ou complexes et conjuguées.
Plus précisément, trois cas se présentent.

Proposition 2.37.— Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant (réel) de (2.4).

- Si $\Delta > 0$, en ce cas, la racine carrée δ de Δ est réelle. Par conséquent, l'équation (2.4) possède deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, l'équation (2.4) possède une racine réelle double.
- Si $\Delta < 0$, les racines carrées complexes de Δ sont $\pm i\sqrt{-\Delta}$. Les solutions de l'équation (2.4) sont les nombres complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

2 Équations polynomiales de degré supérieur à 3

2.a Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $a_n \in \mathbf{C}^\star$, on considère l'équation

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2.5}$$

Le **Théorème Fondamental de l'Algèbre**, que nous retrouverons dans le **Chapitre 20** peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 2.38.— Théorème de D'Alembert-Gauss —. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $a_n \in \mathbf{C}^\star$.

L'équation (2.5) admet au moins une racine dans $\mathbf{C}$.

Pourtant, il n'y a pas de méthode générale de résolution. En pratique, le principe est de se ramener à la résolution d'équations de degré inférieur,

- ▹ par factorisation
- ▹ par changement d'inconnue.

Nous allons illustrer ces méthodes au travers de trois exemples.

2.b Résolution d'une équation polynomiale de degré 3

Proposition 2.39.— Soit $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, on s'intéresse à l'équation du troisième degré :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) possède (au moins) une solution complexe z_0. De plus, pour tout $z \in \mathbf{C}$, nous avons la factorisation

$$az^3 + bz^2 + cz + d = a(z - z_0)P(z)$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré 2.

La démonstration de ce théorème est *hors programme*. Elle repose sur la **méthode de Cardan** [9].

En pratique : pour résoudre une équation de degré 3, vous devez

$\boxed{1}$ trouver une solution particulière z_0,

$\boxed{2}$ factoriser par $(z - z_0)$ pour déterminer $P(z)$ (on procède par *identification des coefficients*),

$\boxed{3}$ résoudre l'équation $P(z) = 0$. (il s'agit d'une équation du deuxième degré).

Le point délicat est la recherche d'une solution particulière. Lorsque l'énoncé ne vous fournit aucune indication, il faut chercher une solution évidente !

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + (9i-1)z - 2(1+5i) = 0$ sachant qu'elle admet au moins une solution réelle.

Solution ▽

1. *Suivant l'indication fournie par l'énoncé, commençons par rechercher une solution réelle x de l'équation.*

$$z^3 - (1+2i)z^2 + (9i-1)z - 2(1+5i) = 0 \tag{2.7}$$

En identifiant parties réelles d'une part et parties imaginaires d'autre part, j'en déduis que x est solution du système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x^2 - x - 2 &=& 0 \\ -2x^2 + 9x - 10 &=& 0 \end{array} \right.$$

9. le lecteur intéressé pourra trouver une preuve par la méthode de Cardan au prochain paragraphe

En particulier, x est solution de l'équation du deuxième degré : $-2x^2+9x-10=0$. Comme le discriminant de cette équation est $\Delta=1$, cette équation admet deux racines réelles distinctes : 2 et $\frac{5}{2}$.
En reportant dans le système ci-dessus, on voit que 2 est racine de l'équation (2.7) (et non $\frac{5}{2}$).

2. *À présent, d'après la* **Proposition** *2.39, il existe un polynôme P de degré 2 tel que*

$$z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=(z-2)P(z)$$

Pour déterminer P, procédons par identification des coefficients : cherchons $(a,b,c)\in\mathbf{C}^3$ tel que

$$z^3-(1+2i)z^2+(9i-1)z-2(1+5i)=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$$

Il est clair que $a=1$ et $c=1+5i$. Pour déterminer b, j'identifie les coefficients de degré 2, il vient $-2+b=-1-2i$, par suite, $b=1-2i$.
Ainsi,

$$(2.7)\iff(z-2)\times\left(z^2+(1-2i)z+(1+5i)\right).$$

3. *Finalement, déterminons les solutions de l'équation $z^2+(1-2i)z+(1+5i)$. Le discriminant de cette équation du deuxième degré est $\Delta=(1-2i)^2-4(1+5i)=-3-4i-4-20i=-7-24i$.*
Déterminons une racine carrée de Δ. Comme visiblement, je ne serai pas capable de trouver l'argument de Δ, je cherche une racine carrée δ en notation algébrique :
En posant $\delta=x+iy$, il vient

$$\delta^2=\Delta\iff\left\{\begin{array}{rcl}x^2-y^2&=&-7\\x^2+y^2&=&\sqrt{625}=25\\xy&<&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x^2&=&9\\y^2&=&16\\xy&<&0\end{array}\right.$$

Ainsi, $\delta=3-4i$ est **une** *racine carrée de Δ. Par conséquent, les racines complexes de P sont :*

$$z_1=\frac{-(1-2i)+(3-4i)}{2}=1-i\quad et\quad z_2=\frac{-(1-2i)-(3-4i)}{2}=-2+3i.$$

4. *Pour résumer, les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation (2.7) sont*

$$\mathcal{S}=\{2;\ 1-i;\ -2+3i\}$$

▲

2.c Résolution d'une équation polynomiale de degré 4

Proposition 2.40.— Soit $(a,b,c,d,e)\in\mathbf{C}^5$, avec $a\neq 0$. L'équation

$$az^4+bz^3+cz^2+dz+e=0 \tag{2.8}$$

admet au moins une racine complexe. De plus, pour tout $z\in\mathbf{C}$, nous avons la factorisation

$$z^4+az^3+bz^2+cz+d=P(z)\times Q(z)$$

où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes de degré 2.

La démonstration est *hors-programme*, elle repose sur la **méthode de Ferrari**[10], présentée au paragraphe suivant.

En pratique : la méthode consiste là encore à factoriser pour abaisser le degré en trouvant une racine particulière.
Lorsque l'énoncé ne fournit aucune indication, pensez à

- effectuer un changement d'inconnue, ou à
- rechercher des solutions particulières !

10. Ludovico Ferrari : 1522-1565

Exercice : Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation

$$z^4 + 5z^2 + 4 = 0. \tag{2.9}$$

On peut remarquer que l'équation proposée est en fait une équation du deuxième degré d'inconnue z^2. C'est ce qu'on appelle une **équation bicarrée**.

Solution ▽
Soit $z \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} z^2 = w \\ w^2 + 5w + 4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = w \\ w = -4 \text{ } ou \text{ } w = -1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad z^2 = -4 \text{ } ou \text{ } z^2 = -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \pm 2i \text{ } ou \text{ } z = \pm i
\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (2.9) *sont* $\mathcal{S} = \{i, -i, 2i, -2i\}$. ▲

2.d Équation polynomiale de degré n

Lorsqu'un exercice vous propose de résoudre une équation polynomiale de degré arbitraire, on se ramène au moyen d'un changement d'inconnue, à la résolution d'une équation aux racines :

$$z^k = a \tag{2.3}$$

ou bien à une équation de la forme :

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0 \tag{2.10}$$

Les solutions de (2.3) sont bien connues puisqu'il s'agit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a. Pour la deuxième équation, on utilisera

Proposition 2.41.— Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Les solutions de (2.10) sont les $n-1$ racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sauf 1.

Démonstration ▽
Soit $z \in \mathbf{C}$. Pour résoudre (2.10), on raisonne par équivalences :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ z^n - 1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce dernier système sont bien les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 différentes de 1. ▲

V COMPLÉMENT : résolution des équations de degré 3 et 4

1 Résolution des équations du troisième degré par la méthode de Cardan

Soit $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, on s'intéresse à l'équation du troisième degré :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) peut être résolue par la méthode de Cardan. Cette méthode est hors programme, j'expose ci-dessous le principe de cette méthode pour votre culture.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de savoir résoudre les équations de la forme particulière :

$$\boxed{z^3 - pz - q = 0} \tag{2.11}$$

En effet posons $\lambda = -\frac{b}{3a}$, on vérifie aisément que :

$$z \text{ est solution de (2.6) } \textit{si et seulement si } \ \zeta = z - \lambda \text{ est solution de (2.11).}$$

avec $p = -(3\lambda^2 + 2\lambda\frac{b}{a} + \frac{c}{a})$ et $q = -(\lambda^3 + \lambda^2\frac{b}{a} + \lambda\frac{c}{a} + \frac{d}{a})$.

Le **principe de la méthode de Cardan** pour résoudre (2.11) dans $\mathbf{C}$, consiste à chercher [11] les solutions de cette équation sous la forme $z = u + v$ avec $\frac{p}{3} = u \times v$. L'intérêt d'un tel changement d'inconnue découle de la **formule du binôme de Newton**, en effet nous avons :

$$\begin{aligned} z^3 &= (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= 3uv(u+v) + u^3 + v^3 \\ &= pz + u^3 + v^3. \end{aligned}$$

tandis que z est solution de (2.11) si et seulement si

$$z^3 = pz + q$$

$$\text{Ainsi, pour que } z \text{ soit solution de (2.11) , il } \textit{faut et il suffit que } \begin{cases} u \times v &= \frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 &= q \end{cases} \tag{2.12}$$

Nous allons chercher les solutions de ce système par **analyse-synthèse**.

Analyse : supposons que (u, v) soit une solution de (2.12), alors en élevant au cube la première condition, nous obtenons que *nécessairement* [12] u^3 et v^3 sont les solutions du système

$$\begin{cases} u^3 \times v^3 &= \frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= q \end{cases} \tag{2.13}$$

D'après le **Corollaire** 2.36, u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation de degré 2 :

$$x^2 - qx + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Appliquons les résultats du paragraphe précédent pour résoudre cette équation de degré 2 : posons $\Delta = \frac{-1}{27}(4p^3 - 27q^2)$ et considérons une racine carrée δ de Δ. D'après la **Proposition** 2.35, il en résulte que :

$$\{u^3, v^3\} = \left\{\frac{q+\delta}{2}, \frac{q-\delta}{2}\right\}$$

Notons α une racine cubique de $\frac{q+\delta}{2}$ et β une racine cubique de $\frac{q-\delta}{2}$. Nous obtenons les neuf candidats (!) suivants pour le couple (u, v) :

$$\mathscr{C} = \{(\alpha,\beta), (\alpha,j\beta), (\alpha,j^2\beta), (j\alpha,\beta), (j\alpha,j\beta), (j\alpha,j^2\beta), (j^2\alpha,\beta), (j^2\alpha,j\beta), (j^2\alpha,j^2\beta)\}$$

11. sans perte de généralité grâce au **Corollaire** 2.36
12. il ne s'agit pas d'une condition nécessaire et suffisante, car l'application $z \mapsto z^3$ n'est pas injective sur $\mathbf{C}$ ...

Synthèse : parmi ces neuf couples possibles, trois couples seulement (α_1, β_1), (α_2, β_2), (α_3, β_3), sont solutions du système (2.12). Ce sont tout simplement ceux pour lesquels la condition $uv = \frac{p}{3}$ est vérifiée. (Les autres six couples vérifient $uv = j\frac{p}{3}$ ou bien $uv = j^2\frac{p}{3}$).
Conclusion : l'ensemble des solutions de (2.11) est donc

$$\mathcal{S} = \{\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3\}$$

2 Résolution des équations du quatrième degré par la méthode de Ferrari

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4$, avec $a \neq 0$. On résout l'équation

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{2.14}$$

Le principe de la méthode de Ferrari consiste à écrire le polynôme du quatrième degré comme la différence de deux carrés :

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = \left(z^2 + \alpha z + \beta\right)^2 - \left(\gamma z + \delta\right)^2$$

de sorte que l'identité remarquable *kivabien* permet de se ramener à la résolution de deux équations de degré 2.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, écrivons

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = \left(z^2 + \frac{a}{2}z + \lambda\right)^2 - \left((2\lambda + \frac{a^2}{4} - b)z^2 + (\lambda a - c)z + (\lambda^2 - d)\right).$$

Cherchons $\lambda \in \mathbf{C}$ de sorte que le deuxième terme de la différence ci-dessus soit un carré. Il suffit pour cela que le discriminant de ce polynôme de degré 2 en z soit nul ! Le paramètre λ doit donc satisfaire :

$$(\lambda a - c)^2 - 4(\lambda^2 - d)(2\lambda + \frac{a^2}{4} - b) = 0.$$

Il s'agit là d'une équation du troisième degré en λ. Appliquons la méthode de **Cardan**, nous pouvons trouver une (au moins) solution λ_0 de cette équation. Cela signifie que le polynôme de degré 4 initial s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d &= \left(z^2 + \frac{a}{2}z + \lambda_0\right)^2 - \left(\tilde{a}z + \tilde{b}\right)^2. \\ &= \left(z^2 + (\frac{a}{2} + \tilde{a})z + \lambda_0 + \tilde{b}\right) \times \left(z^2 + (\frac{a}{2} - \tilde{a})z + \lambda_0 - \tilde{b}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent , nous obtenons pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ l'équivalence

$$z \text{ est solution de (2.14)} \iff z^2 + (\frac{a}{2} + \tilde{a})z + \lambda_0 + \tilde{b} = 0 \text{ ou } z^2 + (\frac{a}{2} - \tilde{a})z + \lambda_0 - \tilde{b} = 0$$

Nous sommes ainsi ramenés à la résolution de deux équations de degré 2 comme annoncé plus haut.

2.a Conclusion

Pour conclure ce chapitre, remarquons que nous avons montré l'existence de solutions complexes de toute équation polynomiale de degré $n \in \{2, 3, 4\}$. Dans chacun de ces cas, les solutions de cette équation peuvent être obtenues en utilisant uniquement les racines $n^{\text{ièmes}}$ des coefficients de l'équation. On dit que les équations de degré 2,3, et 4 sont **résolubles par radicaux**. Plus généralement, il est naturel de se demander dès lors si toute équation (2.5) peut se ramener à la résolution d'équations

$$z^k = a \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

La réponse à cette question est **non** ! Il existe des équations (en tout degré supérieur ou égal à 5) non résolubles par radicaux. Néanmoins, dans les exercices rencontrés, c'est toujours le cas !

Défi ! Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Résolvez dans $\mathbf{C}$ l'équation

$$(z + i)^n = (z - i)^n \tag{2.15}$$