PROGRAMME DE COLLE S04

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FONCTIONS USUELLES (I)

Fonctions logarithmes puissances et exponentielles

Théorème-Définition*.— ln est l'unique primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$ s'annulant en 1. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$\boxed{\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}}$$

Proposition.— Propriétés de la fonction logarithme —. ln : $\mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$$

De plus, la fonction ln réalise une **bijection strictement croissante** de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur $\mathbf{R}$.

Savoir-faire : le graphe de la fonction en précisant les tangentes remarquables.

Théorème.— Règles de calcul pour le logarithme —. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$,

$$\boxed{\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

- $\ln(1) = 0$;
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$;
- $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$;
- Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$;

Théorème-Définition*.— La fonction ln est bijective de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur $\mathbf{R}$. Son application réciproque, notée exp est appelée fonction **exponentielle**. Il s'agit donc d'une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Elle vérifie pour tout couple (x, y) de réels :

$$\boxed{\begin{cases} \bullet & x \in \mathbf{R} \\ \bullet & y = \exp(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \bullet & y \in \mathbf{R}^{+\star} \\ \bullet & x = \ln(y) \end{cases}}$$

De plus la fonction exp est continue, dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

Proposition.— Propriétés de la fonction exponentielle —. La fonction exp : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Elle est dérivable dans $\mathbf{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R} \quad (\exp)'(x) = \exp(x)}$$

Savoir-faire : le graphe de la fonction en précisant les tangentes remarquables.

Théorème.— Règles de calcul pour l'exponentielle —. Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

- $\exp(0) = 1$;
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
- Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Théorème-Définition*.— Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on appelle **puissance d'exposant** α la fonction $p_\alpha : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ définie par : pour tout $x > 0$, par

$$\boxed{p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)}$$

Proposition.— Propriétés des fonctions puissances —. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. $p_\alpha : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ est une bijection strictement monotone sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Son application réciproque est $p_{1/\alpha} : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$. De plus, p_α est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$,

$$\boxed{p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

Savoir-faire : le graphe de la fonction puissance suivant le signe de α.

Proposition.— Règles de calcul pour les puissances —. Pour tous $(x,y) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, on a :

- $\ln\left(x^\alpha\right) = \alpha\ \ln x$
- $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $x^\alpha \times y^\alpha = \left(x \times y\right)^\alpha$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$
- $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$

Remarque : pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $e^x = \exp(x)$. De même, si $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\exp_a(x) = \exp(x \ln a) = a^x$.

Théorème*.— Limites des fonctions puissances exponentielle et logarithme —. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^{+\star}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} p_\alpha(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} p_\alpha(x) = p_\alpha(a)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} p_\alpha(x) = +\infty$

Théorème.— Croissances comparées —. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\alpha > 0, \beta > 0$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta(|\ln x|)^\alpha = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0^+$

■■■ Fonctions hyperboliques

Définition : *Les fonctions **cosinus**, **sinus** et **tangente hyperboliques** sont les fonctions définies sur* $\mathbf{R}$ *par :*

$$\textit{Pour tout } x \in \mathbf{R},\quad \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \mathrm{th}\,(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Relations $e^x = \mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x)$, $e^{-x} = \mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x)$.

Proposition.— Propriétés des fonctions hyperboliques

- La fonction ch $: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$
- La fonction sh $: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$
- La fonction th $: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{th}\,'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$

Savoir-faire : vous devez connaître les tableaux de variation de ces fonctions ainsi que leurs graphes.

Théorème.— Relation fondamentale de trigonométrie hyperbolique —. Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \text{ et } 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}$$

Proposition*.— Autres formules de trigonométrie hyperbolique —.

- $\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$,
- $\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$,
- $\mathrm{ch}\,2a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a$
- $\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a$,
- $\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,b\,\mathrm{ch}\,a$,
- $\mathrm{sh}\,2a = 2\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a$

Savoir-faire : vous devez retrouver rapidement les autres formules de trigonométrie hyperbolique à partir des formules de trigonométrie circulaire en changeant les signes des produits de deux sinus.