Chapitre 12

Étude pratique des suites numériques

Sommaire

OBJECTIFS

A la fin du chapitre, vous devrez savoir

- ▷ utiliser la relation d'équivalence pour comparer une suite à une suite de référence : $\left(\ln^\alpha n\right)$, $\left(n^\alpha\right)$, $\left(a^n\right)$, $\left(n!\right)$ ou $\left(n^n\right)$;
- ▷ reconnaître une suite classique : géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2 ;
- ▷ exprimer le terme général d'une suite classique en fonction de n ;
- ▷ étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
- ▷ étudier une suite définie implicitement comme famille de solutions d'équations.

Introduction

Lors de notre première étude des suites numériques, nous avons établi les résultats de convergence des suites. L'objectif du présent chapitre est d'étudier certaines suites particulières.

En pratique, une suite peut être définie de plusieurs façons :

- les suites $u_n = f(n)$ sont définies comme la restriction à $\mathbf{N}$ d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Il s'agit notamment des suites de référence comme $\ln n$, n^α, a^n, *etc.*
- Les suites classiques, comme les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques ou encore les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont définies par la donnée de leurs premiers termes et par une relation de récurrence, par exemple
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$
Dans ces cas particuliers, il est possible d'obtenir l'expression du terme général u_n en fonction de n.
- les suites récurrentes, sont définies par la donnée de leur premier terme u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Les suites classiques sont autant d'exemples de suites récurrentes. Toutefois dans le cas général, il n'est pas possible d'exprimer le terme général d'une telle suite en fonction de n.
L'étude de la suite (u_n) passe alors par l'étude de la fonction itératrice f.
- les suites définies implicitement, sont définies comme solutions d'équations
$$f_n(x) = 0$$
à l'aide du **théorème de la bijection**. L'étude d'une telle suite passe par celle des fonctions f_n et le cas échéant, de leurs bijections réciproques.

I Suites de référence

Le théorème et les propositions de cette partie constituent une *bibliothèque* d'exemples pour étudier d'autres suites par comparaison[1], ou bien pour *lever une indétermination* lorsque vous utilisez le **Théorème** 7.31. Ces résultats doivent être **parfaitement connus**.

1 Comparaison des suites réelles

1.a Définition

Les relations de domination, négligeabilité et d'équivalents se traduisent sans difficulté pour les suites numériques. Elles permettent d'utiliser les équivalents des fonctions pour l'étude des limites, quand n tend vers $+\infty$ des suites de la forme $u_n = f(n)$.
Les démonstrations des propriétés qui suivent se déduisent aisément des propriétés analogues pour les fonctions, au moyen de la **caractérisation séquentielle des limites**.

Définition : *Soit (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels. On dit que :*

1. *(u_n) est **dominée** par (v_n) s'il existe une suite (φ_n), **bornée**, telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \varphi_n \times v_n$. On note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.*
2. *(u_n) est **négligeable** devant (v_n) s'il existe une suite (φ_n), **convergente vers 0**, telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \varphi_n \times v_n$. On note $u_n = o(v_n)$.*
3. *(u_n) est **équivalente** à (v_n) s'il existe une suite (φ_n), **convergente vers 1**, telle que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \varphi_n \times v_n$. On note $u_n \sim v_n$.*

Notation : *pour les suites, il n'est pas utile de préciser que les relations de domination, négligeabilité et équivalent ont lieu lorsque n tend vers $+\infty$.*

1.b Caractérisation par le quotient

Comme pour les fonctions, nous disposons d'une caractérisation par les quotients, très utile en pratique :

Proposition 12.1.— Caractérisations par les quotients
Soit u et v des suites de nombres réels. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0 , $v_n \neq 0$. Alors

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *si et seulement si* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.
- $u_n = o(v_n)$ *si et seulement si* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- $u_n \sim v_n$ *si et seulement si* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

1.c Caractérisation par la différence

Théorème 12.2.— Caractérisation par la différence —. Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Alors

$$\boxed{u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)}$$

2 Propriétés des suites équivalentes

2.a Propriété fondamentale des suites équivalentes

L'intérêt des équivalents pour le calcul des limites est basé sur la propriété fondamentale suivante :

1. les théorèmes de comparaison sont les **Théorèmes** 7.13, 7.35 , 7.34

Théorème 12.3.— Limite de suites équivalentes —. Soit $(u,v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On suppose que $u_n \sim v_n$. Alors

$$\boxed{(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \quad \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell\right).}$$

Commentaires : autrement dit, pour étudier le comportement asymptotique d'une suite, nous pouvons la remplacer par une suite équivalente.

2.b Opérations algébriques compatibles

Nous retrouvons les mêmes compatibilités (et incompatibilités) que pour le calcul des équivalents de fonctions, en particulier :

Théorème 12.4.— Règles de calcul pour les équivalents —. Soit $(u_n), (v_n), (\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites réelles et $\alpha \in \mathbf{R}$. On suppose que $u_n \sim \alpha_n$ et $v_n \sim \beta_n$. Alors

1. $u_n \times v_n \sim \alpha_n \times \beta_n$.
2. si de plus à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ alors à partir d'un certain rang, $\alpha_n \neq 0$.
3. si de plus à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$ et $\beta_n \neq 0$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$.
4. si de plus à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $\alpha_n > 0$ alors $u_n^\alpha \sim \alpha_n^\alpha$.

2.c Équivalent d'une somme

Pour déterminer l'équivalent d'une somme de deux suites, vous utilisez la caractérisation avec les o :

Théorème 12.5.— Equivalent d'une somme —. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.

$$\boxed{\textbf{Si } v_n = o(u_n), \textbf{ alors } \ u_n + v_n \sim u_n}$$

Enfin, nous pouvons obtenir un équivalent par composition à droite :

Théorème 12.6.— Composition à droite
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in I^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\boxed{\textbf{Si} \left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \bullet \ f \sim_a g \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \ \ f(u_n) \sim g(u_n)}$$

3 Limites et comparaison des suites de référence

3.a Limites des suites de référence

Théorème 12.7.— Soit $(a,\alpha) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a > 1$, $\alpha > 0$.

1. La suite $(\sqrt[n]{a})$ convergente vers 1.	**4.** La suite (a^n) diverge vers $+\infty$.
2. La suite $((\ln n)^\alpha)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.	**5.** La suite $(n!)$ diverge vers $+\infty$.
3. La suite (n^α) diverge vers $+\infty$.	**6.** La suite (n^n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration $\triangledown$

1. Posons $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$. D'après la compatibilité de l'ordre avec la multiplication, $d_n > 0$ et d'après la **formule du binôme de Newton** :

$$a = (1+d_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ d_n^k \geq n.d_n.$$

J'en déduis que

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ d_n \leq \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où, d'après le **Théorème** 7.13, il s'ensuit que $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire par définition $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Découle de la caractérisation séquentielle de la limite :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^\alpha = +\infty \\ \bullet\ \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (\ln n)^\alpha = +\infty.$$

3. 4. procèdez de même !

5. 6. Par comparaison, les inégalités $\forall n \in \mathbf{N}, n! \geq n$ et $\forall n \in \mathbf{N}\ n^n \geq n$ entraînent que les suites $(n!)$ et (n^n) sont divergentes vers $+\infty$. ▲

Remarque : A propos du 1., le résultat est en fait valide pour tout nombre réel positif $a > 0$. En effet,

— Si $a = 1$, la suite $(\sqrt[n]{a})$ est la suite constante 1, il n'y a rien à faire.

— Si $0 < a < 1$, on obtient le même résultat en passant aux inverses. ☺

3.b Croissances comparées des suites de références

Ainsi, pour toutes valeurs de $a \in]1, +\infty[$ et de $\alpha \in \mathbf{R}^{+\star}$, les suites $(\ln n)^\alpha$, (n^α), (a^n), $(n!)$ et (n^n) sont divergentes vers $+\infty$. Toutefois, ces suites ne tendent pas vers $+\infty$ à la même *vitesse* comme le montre le **Théorème** ci-dessous :

Théorème 12.8.— Comparaison des suites de référence —. Soit $\beta > 0$, $0 < \alpha < \alpha'$ et $1 < a < b$ des nombres réels. Alors

1.	$(\ln n)^\alpha = o\big((\ln n)^{\alpha'}\big)$	**4.**	$n^\alpha = o\big(a^n\big)$
2.	$(\ln n)^\beta = o\big(n^\alpha\big)$	**5.**	$a^n = o\big(b^n\big)$
3.	$n^\alpha = o\big(n^{\alpha'}\big)$	**6.**	$a^n = o\big(n!\big)$

À l'aide de la caractérisation par les quotients, nous obtenons

Théorème.— Soit $(\alpha, \alpha', \beta, a, b) \in \mathbf{R}^5$ tels que $0 < \alpha < \alpha'$, $0 < \beta$ et $1 < a < b$. Alors

1.	$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{(\ln n)^{\alpha'}} = 0$	**4.**	$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$
2.	$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	**5.**	$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{b^n} = 0$
3.	$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha'}} = 0$	**6.**	$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Démonstration ▽

1. 2. 3. 4. et 5. découlent aisément des croissances comparées des fonctions usuelles au moyen de la caractérisation séquentielle des limites. Montrons par exemple le 4.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \\ \bullet\ \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

6. Notons N la partie entière de $|a|$, de sorte que par définition $N \leq |a| < N+1$. Soit $n > N$, il vient :

$$\begin{aligned} \left|\frac{a^n}{n!}\right| &= \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\left(\frac{|a|}{N+1}\cdots\frac{|a|}{n}\right) \\ &\leq \left(\frac{|a|}{1}.\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{N}\right)\times\frac{|a|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

La conclusion découle cette fois du **Théorème** 7.13. ▲

Remarque : Les résultats de ce théorème doivent être parfaitement connus. Le lecteur attentif aura remarqué qu'il s'agit en fait de **formes indéterminées**. Précisément, ces relations de comparaison entre suites de référence permettent de lever les indéterminations comme le montrent les exemples suivants.

Exercice : Etudiez l'existence des limites des suites définies pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+\sin n}{n+(\ln n^3)^4}$ et $v_n = \dfrac{10^n - n^{10}}{2^n + n!}$

Solution ▽

Pour la première suite, grâce au théorème de divergence par comparaison, l'inégalité : $n^2+\sin n \geq n^2-1$ *permet de conclure que le numérateur est divergent vers* $+\infty$. *De même, pour* $n \in \mathbf{N}^\star$, *l'inégalité* $n+(\ln n^3)^4 \geq n$ *permet de conclure que le numérateur est divergent vers* $+\infty$. *Il s'agit donc d'une* **forme indéterminée** $\dfrac{\infty}{\infty}$. *Normal ! sinon, on ne vous poserait pas la question !*

Pour lever cette indétermination, on utilise le **Théorème** *12.8 de la façon suivante :*

$$u_n = \frac{n^2+\sin n}{n+(\ln n^3)^4} = \frac{n^2}{n}\times\frac{1+\frac{\sin n}{n^2}}{1+81\frac{\ln^4 n}{n}} = n\times\frac{1+\frac{\sin n}{n^2}}{1+81\frac{\ln^4 n}{n}}$$

Dans cette dernière expression de u_n, **il n' y a plus d'indétermination** *: tout d'abord* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. *D'autre part, comme* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n^2} = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\ln^4 n}{n} = 0$, *j'en déduis, par opérations algébriques sur des suites convergentes que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin n}{n^2}}{1+81\frac{\ln^4 n}{n}} = 1$$

Par suite le **Théorème** *7.31 permet de conclure que* (u_n) *est divergente vers* $+\infty$. ▲

3.c Équivalents usuels

Les équivalents qui suivent découlent directement du **Théorème** 9.24 et de la caractérisation séquentielle des limites de fonctions :

Théorème 12.9.— Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

• $\sin u_n \sim u_n$	• $1-\cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$	• $\tan u_n \sim u_n$
• $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$	• $\ln(1+u_n) \sim u_n$	• $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Démonstration ▽

Tous ces équivalents sont établis à l'aide de la caractérisation séquentielle de la limite à partir des équivalents pour les fonctions usuelles au voisinage de 0. Par exemple,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1 \\ \bullet\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{u_n}-1}{u_n} = 1$$

Grâce à la caractérisation par les quotients, ceci entraîne que $e^{u_n} - 1 \sim u_n$. ▲

À l'aide des **Intégrales de Wallis**, nous démontrerons au deuxième semestre le :

Théorème 12.10.— Formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$$

3.d Mise en œuvre

Exercice : Déterminez un équivalent de la suite (u_n) définie ci-dessous et en déduire son comportement asymptotique :

1. $a_n = \dfrac{\sin 1/n}{e^{1/n}-1}$

2. $b_n = \dfrac{(1-\cos 1/n)\,\cos 1/n}{e^{1/n^2}-1}$

3. $c_n = \left(\dfrac{n^3}{5n+n^3}\right)^n$

4. $d_n = \sqrt{2n^2+3n} - \sqrt{5n^2-1}$

Solution ▽

*1. Soit $u_n = 1/n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, je déduis directement du **Théorème** précédent que*

$$\frac{\sin 1/n}{e^{1/n}-1} \sim 1.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin 1/n}{e^{1/n}-1} = 1$.

2. Posons $u_n = 1/n$. Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or, au voisinage de 0, nous avons les équivalents suivants

$$1-\cos u \sim_0 \frac{u^2}{2}, \quad \cos u \sim_0 1, \quad e^{u^2}-1 \sim_0 u^2$$

Par compatibilité des équivalents avec le produit et le quotient, j'en déduis que

$$\frac{(1-\cos u)\,\cos u}{e^{u^2}-1} \sim \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$\frac{(1-\cos 1/n)\,\cos 1/n}{e^{1/n^2}-1} \sim \frac{1}{2}.$$

3. Remarquons que $c_n = \exp\left[n\ln\left(\dfrac{n^3}{n^3+5n}\right)\right] = \exp\left[n\ln\left(1-\dfrac{5n}{n^3+5n}\right)\right]$.

Posons $u_n = n\ln\left(1-\dfrac{5n}{n^3+5n}\right)$. Vérifions que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. En effet, notons $h_n = -\dfrac{5n}{n^3+5n}$. Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$. Comme $\ln(1+h) \sim_0 h$, j'en déduis que

$$\ln(1+h_n) \sim h_n \sim \frac{-5}{n^2}$$

*Ainsi, $u_n \sim \dfrac{-5}{n}$ est convergente de limite 0. D'après la **caractérisation séquentielle de la limite** pour la limite en 0 de $\exp$, il en résulte que*

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 1.$$

Par conséquent, $c_n \sim 1$.

4. Un petit calcul préliminaire s'impose :

$$\sqrt{2n^2+3n} - \sqrt{5n^2-1} = \frac{2n^2+3n-5n^2+1}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{5n^2-1}} = \frac{-3n^2+3n+1}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{5n^2-1}}$$

Le numérateur étant polynomial, il est équivalent (au voisinage de $+\infty$) à $-3n^2$. Le dénominateur est la somme de deux suites positives. On peut donc légalement additionner les équivalents. Or par compatibilité des équivalents avec les puissances, nous avons $\sqrt{2n^2+3n} \sim \sqrt{2n^2} \sim \sqrt{2}\,n$. De même, $\sqrt{5n^2-1} \sim \sqrt{5}\,n$. Par conséquent,

$$\sqrt{2n^2+3n} - \sqrt{5n^2-1} \sim \frac{-3n^2+3n+1}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})\,n} \sim \frac{-3\,n}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

Par conséquent, la suite est divergente vers $-\infty$. ▲

II Suites classiques

Dans cette section, nous étudions en détail les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, ou encore récurrentes linéaires d'ordre 2.
L'intérêt est double : d'une part ces suites interviennent parfois dans des problèmes comme suites auxiliaires, d'autre part elles donnent des exemples assez simples de suites récurrentes.

1 Suites arithmétiques

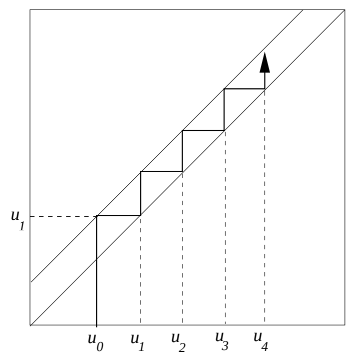
Définition : *Une suite u est dite* ***arithmétique*** *s'il existe $r \in \mathbf{R}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

r est appelé la ***raison*** *de la suite u.*

Remarque : Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la donnée de sa raison et de son premier terme [2].

Construction graphique d'une suite arithmétique :



Proposition 12.11.— Suites arithmétiques —. Étant donné $a \in \mathbf{R}$ et $r \in \mathbf{R}$, il existe une unique suite u telle que

$$\boxed{\begin{cases} \bullet & u_0 = a \\ \bullet & \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}} \tag{12.1}$$

Elle est définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a + n.r}$$

Démonstration ▽
Existence : il est clair que la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a + n.r$ vérifie $u_0 = a$ et la relation de récurrence.
Unicité : soit $\big((u_n),(v_n)\big)$ un couple de suites vérifiant les conditions

$$u_0 = a,\ v_0 = a,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r,\ v_{n+1} = v_n + r$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = v_n$.
Init. $u_0 = a = v_0$.
Hér. soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = v_n$. Alors $u_{n+1} = u_n + r = v_n + r = v_{n+1}$.
Ccl. Par récurrence, nous avons prouvé que $u = v$. ▲

La monotonie de la suite u est simple à étudier puisque d'après (12.1), pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$. Ainsi , trois cas se présentent :

- Si $r = 0$: la suite u est la suite est la suite constante égale à a.

2. ou de quelque autre terme

- Si $r < 0$: la suite u est strictement décroissante. De plus d'après (12.1), la suite u est non minorée. D'après le **Théorème** 7.38 u est divergente vers $-\infty$.
- Si $r > 0$: la suite u est strictement croissante et non majorée d'après (12.1). D'après le **Théorème** 7.38 u est divergente vers $+\infty$.

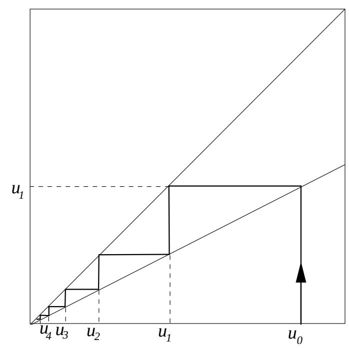
2 Suites géométriques

2.a Définition

Définition : *Une suite u est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = q.u_n$.*
*Le nombre q est appelé la **raison** de la suite u.*

Remarque : Si $u_0 = 0$, la suite u est la suite constante égale à 0. Si $u_0 \neq 0$, la suite u est uniquement déterminée par la donnée de $u_0 \in \mathbf{R}^\star$ et de $q \in \mathbf{R}$.

Construction graphique d'une suite géométrique :



Comme pour les suites arithmétiques, on démontre :

Proposition 12.12.— Suites géométriques —. Étant donné $a \in \mathbf{R}^\star$ et $q \in \mathbf{R}$, il existe une unique suite u telle que

$$\boxed{\begin{cases} \bullet & u_0 = a \\ \bullet & \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = q.u_n \end{cases}} \qquad (12.2)$$

Elle est définie par

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a\ q^n}$$

2.b Comportement asymptotique

Le théorème suivant précise le comportement asymptotique des suites géométriques :

Théorème 12.13.— Soit $a \in \mathbf{R}^\star$ et $q \in \mathbf{R}$ fixés.

La suite géométrique définie par (12.2) est convergente *si et seulement si* $|q| < 1$ ou $q = 1$.

Plus précisément, on distingue quatre cas :

- Si $|q| < 1$, la suite u est *convergente de limite nulle.*
- Si $q = 1$, la suite u est la suite *constante* égale à a.
- Si $1 < q < +\infty$, la suite u est *divergente vers* $a \times (+\infty)$.
- Si $-\infty < q \leq -1$, la suite u est *divergente* (ni vers $+\infty$, ni vers $+\infty$)

Démonstration ▽
Discutons suivant la valeur de la raison.

- Si $q = 1$, la suite u (constante égale à 1) converge vers 1.
- Si $|q| < 1$, nous avons déjà prouvé que la suite la suite (q^n) converge vers 0. Par OPA, il s'ensuit que $(u_n) = (aq^n)$ est aussi convergente de limite nulle.
- Si $q \in]1, +\infty[$, alors (q^n) diverge vers $+\infty$. Donc par OPA, (u_n) diverge vers $a \times \infty$.
- Si $q \in]-\infty, -1[$, la suite u est alternée, *i.e.* change de signe suivant la parité de n. Il en résulte que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont divergentes vers $+\infty$ et $-\infty$ respectivement. En particulier, la suite u est divergente, et ne diverge ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

▲

Exercice : Comparaison à une suite géométrique —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1}| \leq k\ |u_n|$$

Montrez que u est convergente de limite nulle.

Solution ▽
On a

$$\begin{array}{rcl} |u_1| & \leq & k|u_0| \\ |u_2| & \leq & k|u_1| \leq k^2|u_0| \\ |u_3| & \leq & k|u_2| \leq k^3|u_0| \\ & \vdots & \\ |u_n| & \leq & k|u_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n|u_0| \end{array}$$

Par comparaison, il s'ensuit que (u_n) converge vers 0 ▲

2.c Suite des sommes partielles d'une suite géométrique

Soit u la suite géométrique définie par (12.2). On définit une nouvelle suite, notée S en posant

$$\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

appelée **suite des sommes partielles** des termes de la suite u.

Proposition.— La suite des sommes partielles S d'une suite géométrique u de raison q est convergente *si et seulement si* $|q| < 1$. En ce cas :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}}$$

Notation : *On note cette dernière relation* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$.

Démonstration ▽
La condition est nécessaire : en effet si S_n est convergente, alors $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$ est aussi convergente, d'après les propriétés algébriques des suites convergentes, de limite $0 = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1}$. Or $(S_n - S_{n-1}) = u_n$. Donc nécessairement u est convergente de limite nulle. D'après la proposition précédente, ceci n'est possible que si $|q| < 1$. Finalement, si S est convergente, alors $|q| < 1$.
Réciproquement Si $|q| < 1$, montrons que la suite des sommes partielles est convergente de limite $\dfrac{u_0}{1-q}$.
Pour cela, explicitons S_n. Soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons déjà vu l'**Identité géométrique** :

$$(1-q) \times \sum_{k=0}^{n} q^k = (1 - q^{n+1}).$$

Comme $q \neq 1$, nous en déduisons que

$$S_n = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Comme par hypothèse $|q| < 1$, la proposition précédente entraîne que $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. D'après les propriétés algébriques des suites convergentes, il en résulte finalement que (S_n) est convergente de limite $\dfrac{u_0}{1-q}$. ▲

3 Suites arithmético-géométriques

3.a Définition

Définition : *Une suite u est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, tel que*

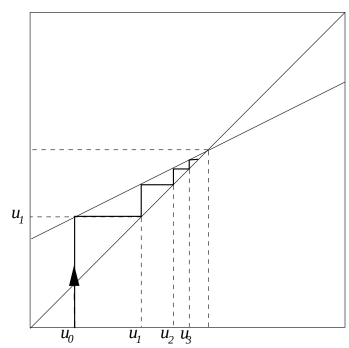
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des exemples particuliers de suites arithmético-géométriques. En effet :

- Lorsque $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique de raison b,
- Lorsque $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Dans la suite de la discussion, nous supposerons que $a \neq 1$ et $b \neq 0$ afin d'écarter ces cas particuliers.

3.b Construction graphique d'une suite arithmético-géométrique



Dans le cas général, si la suite u n'est pas une suite géométrique de raison a, il est toutefois toujours possible de lui associer une suite géométrique v de raison a.

Théorème 12.14.— Suites arithmético-géométriques —. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$ et (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b} \tag{12.3}$$

Soit r la solution de l'équation "*au point fixe*" $\quad r = ar + b, \quad$ alors

$$\boxed{\text{La suite } v = u - r \text{ est géométrique de raison } a.}$$

Démonstration ▽
Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{array}{r|rcl} 1\times & u_{n+1} & = & au_n + b \\ -1\times & r & = & ar + b \end{array}$$

$$u_{n+1} - r \quad = \quad a\,(u_n - r)$$

Ainsi $v_{n+1} = av_n$. Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la suite (v_n) est géométrique de raison a. ▲

Corollaire 12.15.— Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $a \neq 1$ et $b \neq 0$ Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, unique , telle que

$$\boxed{\begin{cases} \bullet & u_0 = c \\ \bullet & \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = a.u_n + b \end{cases}}$$

Elle est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = c\ a^n + b\ \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

En pratique : il n'est pas nécessaire de retenir l'expression de u_n en fonction de n, mais vous devez savoir la retrouver en suivant la méthode suivante :

- Résoudre l'équation "*au point fixe*" $r = ar + b$
- En ce cas, la suite $v = (u_n - r)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison a. Vous en déduisez que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(u_n - r) = a^n(u_0 - r)$.
- Finalement, $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = r + a^n(u_0 - r)$.

Démonstration ▽
Afin de retrouver l'expression de u_n en fonction de n, cherchons u_n sous la forme $v_n + r$, où (v_n) est une suite géométrique de raison a et r une constante à déterminer.
Procédons par *Analyse-synthèse :*
Analyse : supposons qu'une telle suite u existe. D'après le **Théorème**, la suite $v = u - r$ est géométrique de raison a, où $r = \frac{b}{1-a}$. Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = a^n\ (c - r),$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= r + a^n\ (c - r) \\ &= r\,(1 - a^n) + c\ a^n \\ &= c\ a^n + b\ \frac{1 - a^n}{1 - a} \end{aligned}$$

Synthèse : Réciproquement, posons $r = \frac{b}{1-a}$ et définissons la suite (u_n) par

$$\forall n \in N, \quad u_n = r + a^n\,(c - r)$$

En ce cas, on vérifie que $u_0 = c$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} a\,u_n + b &= a\big[r + a^n\ (c - r)\big] + b \\ &= a\,r + b + a^{n+1}(c - r) \\ &= r + a^{n+1}(c - r) = u_{n+1} \end{aligned}$$

▲

Exercice : Exprimez en fonction de n la suite u définie par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3$$

Solution ▽
1. L'équation au point fixe $r = 2r - 3$ admet pour solution $r = 3$.
2. D'après le **Théorème** *12.14 la suite $u_n - 3$ est géométrique de raison 2. Par suite, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $u_n - 3 = 2^n(u_0 - 3) = -2^{n+1}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 3 - 2^{n+1}$.* ▲

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

4.a Définition, exemple

Définition : *Une suite u est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}^\star$, tel que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{12.4}$$

Exemple : nous avons déjà renconré la suite de **Fibonacci** définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Notation : *Dans la suite, $\mathscr{E}_{a,b}$ désignera l'ensemble des suites réelles vérifiant (12.4).*

Afin de déterminer l'expression de u_n en fonction de n, nous étudions tout d'abord les propriétés de l'**ensemble** $\mathscr{E}_{a,b}$.

4.b $\mathscr{E}_{a,b}$ est stable par combinaisons linéaires

La première remarque c'est que $\mathscr{E}_{a,b}$ est **stable par combinaisons linéaires** :

Lemme 12.16.— L'ensemble $\mathscr{E}_{a,b}$ vérifie les propriétés suivantes :

- la suite nulle appartient à $\mathscr{E}_{a,b}$.
- $\forall (u, v) \in \mathscr{E}_{a,b} \times \mathscr{E}_{a,b}$, $u + v \in \mathscr{E}_{a,b}$.
- $\forall u \in \mathscr{E}_{a,b}$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \cdot u \in \mathscr{E}_{a,b}$

Ces propriétés montrent que $\mathscr{E}_{a,b}$ est un *sous-espace vectoriel* de $(\mathbf{R}^\mathbf{N}, +, \cdot)$.

Démonstration ▽

La suite ν constante égale à 0 vérifie $\nu_0 = \nu_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\nu_{n+2} = a\nu_{n+1} + b\nu_n$. Elle appartient donc à $\mathscr{E}_{a,b}$.
Soit u et v deux suites appartenant à $\mathscr{E}_{a,b}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{array}{r|l}\lambda\times & u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ \mu\times & v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \end{array}$$

$$(\lambda u + \mu v)_{n+2} = a\,(\lambda u + \mu v)_{n+1} + b\,(\lambda u + \mu v)_n$$

Ainsi, la suite $(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)_n$ appartient à $\mathscr{E}_{a,b}$.
En particulier, en prenant successivement $\mu = 0$ et $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ on obtient les résulats annoncés. ▲

4.c Équation caractéristique

Cherchons à présent à déterminer quelles suites géométriques appartiennent à $\mathscr{E}_{a,b}$. En écrivant la relation de récurrence pour $n = 0$, nous obtenons, l'**équation caractéristique de** $\mathscr{E}_{a,b}$:

Lemme 12.17.— Soit $r \in \mathbf{C}$.

La suite géometrique $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est élément de $\mathscr{E}_{a,b}$ *si et seulement si* $r^2 - ar - b = 0$

Vocabulaire : *l'équation $r^2 = ar + b$ est appelée l'**équation caractéristique** de $\mathscr{E}_{a,b}$.*

Démonstration ▽

La condition est évidemment *nécessaire* : si $(r^n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{E}_{a,b}$, alors appliquons (12.4) avec $n = 0$, nous obtenons précisément $r^2 - ar - b = 0$.
Montrons que la condition est *suffisante* : supposons que r vérifie la relation $r^2 - ar - b = 0$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. En multipliant la relation $r^2 = ar + b$ par r^n, nous obtenons directement

$$r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n,$$

ce qui prouve que la suite $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\mathscr{E}_{a,b}$. ▲

4.d Structure de $\mathscr{E}_{a,b}$

Par conséquent, nous connaissons parfaitement les suites géométriques de $\mathscr{E}_{a,b}$. D'autre part, nous savons que les combinaisons linéaires de suites de $\mathscr{E}_{a,b}$ restent dans $\mathscr{E}_{a,b}$. La *bonne surprise* c'est que les seules suites de $\mathscr{E}_{a,b}$ sont *essentiellement* les combinaisons linéaires de suites géométriques !
Plus précisément

Théorème 12.18.— Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^\star \times \mathbf{R}^\star$ et (u_n) une suite de nombres *réels* vérifiant la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$$

Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

- Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, notées r_1, r_2 et il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$$
- Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique possède une racine réelle double, notée r_0 et il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\lambda + n\,\mu) r_0^n}$$
- Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes, notées $r = \rho e^{i\theta}$, $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$ et il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)}$$

En pratique : pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n

- vous formez puis résolvez l'équation caractéristique.
- vous en déduisez, grâce au théorème, l'expression de u_n en fonction de n, λ et μ.
- vous déterminez enfin λ et μ à l'aide de deux valeurs particulières de la suite (u_0 et u_1 par exemple).

Démonstration ▽

- Supposons que $\Delta > 0$. Soit $u \in \mathscr{E}_{a,b}$ fixée, nous montrons par **analyse-synthèse** qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $u = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

  Analyse : Supposons qu'un tel couple existe, alors nécessairement : $\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &= u_1 \end{cases}$.

  Comme $r_1 \neq r_2$, ce système possède un unique couple solution $\lambda = \dfrac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$.

  Synthèse : Posons donc $\lambda = \dfrac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1}$ et $\mu = \dfrac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$, on vérifie par **récurrence double** que :

  $$\mathscr{P}(n) \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

  Introduisons pour ce faire, la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$. Comme r_1 et r_2 sont racines de l'équation caractéristique, les suites géométriques (r_1^n) et $(r_2)^n$ appartiennent à $\mathscr{E}_{a,b}$. Par stabilité par combinaison linéaire, il en résulte que (v_n) appartient encore à $E_{a,b}$.

  Initialisation : Il s'agit de démontrer que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$. Mais précisément, nous avons construit λ et μ pour qu'ils satisfassent ces relations !

  Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. Comme les suites (u_n) et (v_n) appartiennent toutes deux à $\mathscr{E}_{a,b}$, il vient :

  $$\begin{array}{r|l} a\times & u_{n+1} = v_{n+1} \\ b\times & u_n = v_n \\ \hline & u_{n+2} = v_{n+2} \end{array}$$

  Conclusion : Par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, nous avons démontré que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

- Supposons que $\Delta = 0$. Soit $u \in \mathscr{E}_{a,b}$ fixée. Nous montrons comme précédemment qu'il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $u = \lambda r_0^n + n\mu r_0^n$.

  Supposons qu'un tel couple existe, alors nécessairement : $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r_0 + \mu r_0 = u_1 \end{cases}$. Comme $r_0 \neq 0$, ce système possède une unique solution $\lambda = u_0$ et $\mu = \frac{u_1 - r_0 u_0}{r_0}$.

  Réciproquement, définissons λ et μ comme ci-dessus. Montrons tout d'abord que la suite $n\mu r_0^n$ est une suite de $\mathscr{E}_{a,b}$. Pour cela, remarquons que r_0 étant racine double de l'équation caractéristique, nous avons $a = 2r_0$ et $b = -r_0^2$. Par suite :

  $$(n+2)r_0^{n+2} - a(n+1)r_0^{n+1} - bnr_0^n = r_0^{n+2} \times \big[(n+2) - 2(n+1) + n\big] = 0.$$

  Par conséquent, la suite (nr_0^n) appartient à $\mathscr{E}_{a,b}$. Comme $\mathscr{E}_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire, la suite définie par $v_n = \lambda r_0^n + n\mu r_0^n$ est une suite de $\mathscr{E}_{a,b}$. Comme cette suite possède les mêmes deux premiers termes que u et vérifie *aussi* la relation de récurrence

  $$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

  une récurrence double montre que ces deux suites sont égales.

- Supposons que $\Delta < 0$. En ce cas, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées, $\rho e^{\pm i\theta}$. Il s'ensuit que les *suites complexes* $\rho^n e^{in\theta}$ et $\rho^n e^{-in\theta}$ vérifient la relation de récurrence (12.4). Comme $\mathscr{E}_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire, il découle des formules d'*Euler* que les suites $\rho^n \sin n\theta$ et $\rho^n \cos n\theta$ vérifient aussi cette relation de récurrence. Choisissons comme précédemment les paramètres λ et μ de sorte que les suites u_n et $\rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$ aient les mêmes premiers termes. Un récurrence montre que nécessairement ces deux suites sont égales.

▲

Exercice : Déterminez l'expression en fonction de n de la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$

Solution ▽

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$ *qui admet pour solutions complexes conjuguées* $e^{i\pi/3} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ *et* $e^{-i\pi/3} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$. *D'après le* **Théorème** *12.18, il existe un couple* $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$*, unique tel que* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n = \lambda \cos \dfrac{n\pi}{3} + \mu \sin \dfrac{n\pi}{3}$. *Pour déterminer les constantes* λ *et* μ*, j'utilise les "conditions initiales". L'égalité ci-dessus étant valide pour tout entier naturel* n*, j'obtiens en particulier pour* $n = 0$ *et* $n = 1$ *, le système* $\begin{cases} 1 &= \lambda \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} &= \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu \end{cases}$ *. D'où je tire* $\lambda = 1$ *et* $\mu = -1$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \cos \dfrac{n\pi}{3} - \sin \dfrac{n\pi}{3}$. ▲

III Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

De nombreux exemples de suites sont définies de manière implicite par une relation liant les $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ termes de la suite. Ces suites particulières sont appelées **les suites récurrentes**.

1 Définition des suites récurrentes

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est une **suite récurrente** s'il existe une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in I \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple : Les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques sont des suites récurrentes.

Vocabulaire : *la fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est appelée la **fonction itératrice**.*

1.a Problème de construction de suites récurrentes

Pour construire une suite récurrente, on peut partir d'une valeur initiale $a \in I$ et d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. On définit alors les termes de la suite (u_n) de proche en proche :

$$\begin{array}{rcl}
u_0 & = & a \in I \text{ est fixé} \\
u_1 & = & f(u_0) = f(a) \\
u_2 & = & f(u_1) = f\left(f(u_0)\right) = f\circ f(a) \\
u_3 & = & f(u_2) = f\left(f(u_1)\right) = f\left(f\left(f(u_0)\right)\right) = f\circ f\circ f(a) \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
u_n & = & f(u_{n-1}) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f\circ f}_{n\ fois}(a)
\end{array}$$

Cependant, *une telle construction n'est pas toujours possible* car il faut s'assurer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ u_n soit dans l'intervalle de définition I de f.

Exemple : Les relations $u_0 = -\dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ ne définissent pas une suite récurrente :

$$\begin{array}{rcl}
u_0 & = & -3/2 \\
u_1 & = & -2 \\
u_2 & = & -1
\end{array}$$

u_3 n'est pas défini !!

1.b Intervalle stable

Pour garantir que les relations $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent bien une suite, il est suffisant que f soit définie sur un intervalle stable I, c'est-à-dire **définie** sur I **et à valeurs dans** I.

Proposition 12.19.— Étant donné une fonction $f : I \to I$, définie sur un intervalle I à valeurs dans ce même intervalle I, et $a \in I$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, unique telle que

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}} \tag{12.5}$$

De plus, $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de I.

Vocabulaire : *on dit que I est **stable** pour f lorsque comme ci-dessus, $f(I) \subset I$.*

En pratique : pour vérifier qu'une suite (u_n) est bien définie par la donnée de son premier terme a et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

vous chercherez un intervalle I stable par f contenant a.

Démonstration ▽

■**Existence** Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) \qquad\qquad u_n \text{ est bien défini et } u_n \in I$$

- **Initialisation :** par hypothèse $u_0 = a$ est bien défini et appartient à I
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que u_n est bien éfini et appartient à I.
  Comme f est définie sur I, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. Comme I est stable par f, u_{n+1} appartient à I.
- **Conclusion :** par récurrence sur I, on a prouvé que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans I.

■**Unicité :** soit $(u, v) \in I^{\mathbf{N}} \times I^{\mathbf{N}}$ un couple de suite d'éléments de I vérifiant (12.5).
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que

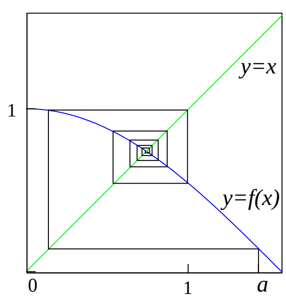
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = v_n$$

- **Initialisation :** par (12.5) $u_0 = a$ et $v_0 = a$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = v_n$. Comme f est une application, il en résulte que $f(u_n) = f(v_n)$. Comme u et v vérifient (12.5), ceci revient à dire que $u_{n+1} = v_{n+1}$.
- **Conclusion :** par récurrence, on a prouvé que $u = v$. ▲

NB : Dans la suite du cours, nous supposerons toujours que f **est définie sur un intervalle stable**.

1.c Construction graphique

On peut construire les termes de la suite définie par (12.5) à l'aide des représentations graphiques de f et de l'identité, comme nous l'avons déjà fait lors de l'étude des suites classiques :



Plaçons a sur l'axe des abscisses.

La verticale issue de a coupe le graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. La valeur de son ordonnée est donc u_1.

A l'aide de la première bissectrice, on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses et on repète alors le procédé à partir de u_1.

2 Étude des variations

En général, pour étudier la monotonie d'une suite, vous pouvez déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 (lorsque la suite est de signe constant). Ces méthodes mettant en jeu u_{n+1} et u_n sont particulièrement adaptées à l'étude des suites récurrentes. Il existe cependant d'autres méthodes pour étudier la monotonie des suites récurrentes.

2.a Résultat général

Théorème 12.20.— Soit $f : I \to I$ une application définie sur un intervalle stable I de $\mathbf{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (12.5). Soit $h : I \to \mathbf{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in I,\ h(x) = f(x) - x$.

- **Si** h est positive sur I, **alors** (u_n) est croissante.
- **Si** h est négative sur I, **alors** (u_n) est décroissante.

Démonstration ▽

Supposons que h soit négative sur I.
Soit $n \in \mathbf{N}$, alors $u_n \in I$. Comme h est négative sur I, $h(u_n) \leq 0$, *i.e.* $f(u_n) \leq u_n$. Par construction de la suite (u_n),

c'est dire précisément que $u_{n+1} \leq u_n$.
Ceci étant vrai pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la suite (u_n) est décroissante. ▲

Exercice : Étudiez suivant la valeur de a, la monotonie de la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} \end{cases}$$

Solution ▽
Notons $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{ch} x}$. Comme f est définie sur –l'intervalle stable– $\mathbf{R}$, la suite (u_n) est bien définie.

■*Étudions le signe de $h = f - Id$: soit $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$h(x) = x\left[\frac{1}{\operatorname{ch} x} - 1\right]$$

Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1$, on a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

■*Discutons suivant la valeur de a la monotonie de la suite u.*

- *si $a \in \mathbf{R}^+$. L'intervalle $\mathbf{R}^+$ étant stable par f, le* **Théorème** *12.20 s'applique : comme h est négative sur $\mathbf{R}^+$, la suite (u_n) est –positive et – décroissante.*
- *si $a \in \mathbf{R}^-$. L'intervalle $\mathbf{R}^-$ étant stable par f, le* **Théorème** *12.20 montre en ce cas que la suite (u_n) est –négative et – croissante.* ▲

2.b Cas d'une fonction itératrice monotone

En ce qui concerne les liens entre la **monotonie** de la fonction f et celle de la suite (u_n), le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 12.21.— Cas d'une itératrice monotone —. Soit $f : I \to I$ une application définie sur un intervalle stable I de $\mathbf{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (12.5). On suppose que f est monotone.

- **Si** f est croissante sur I **alors** u est monotone.
- **Si** f est décroissante sur I **alors** les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Warning : la monotonie de f n'entraîne pas celle de u !

En pratique : lorsque f est monotone sur I, pour étudier les propriétés de monotonie de (u_n),

- si la fonction f est croissante : la suite u est monotone. Pour déterminer son sens de variation, *comparez* u_0 et u_1, ou ce qui revient au même, étudiez le signe de $f(u_0) - u_0 = h(u_0)$.
- si la fonction f est décroissante : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Pour connaître leurs sens de variation, comparez par exemple u_0 et u_2.
  - ▹ Si $u_0 \leq u_2$, la suite (u_{2n}) est croissante, et par conséquent la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
  - ▹ Si $u_0 \geq u_2$, la suite (u_{2n}) est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est donc croissante.

Démonstration ▽

- Supposons f croissante, et montrons que u est monotone.
  Nous distinguons deux cas :
  - ▹ si $u_0 \leq u_1$. En ce cas, comme f est croissante[3], j'obtiens en appliquant f aux deux membres de cette inégalité que $u_1 \leq u_2$. En appliquant de nouveau f j'obtiens $u_2 \leq u_3$, *etc* ...
    Une récurrence immédiate montre qu'en ce cas la suite u est croissante.

3. i.e. préserve les inégalités

- ▷ si $u_0 \geq u_1$, nous obtenons en appliquant successivement f comme précédemment que la suite u est décroissante.

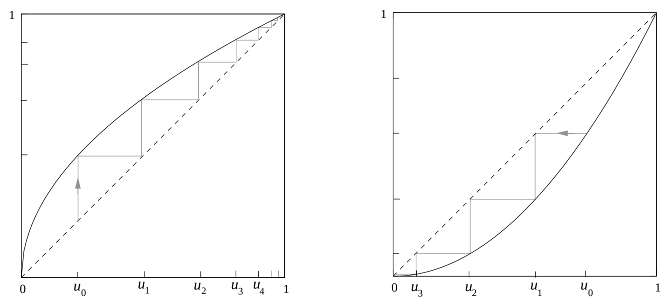
Dans tous les cas, la suite u est monotone.

- ▸ Supposons f décroissante. En remarquant que la fonction $f \circ f$ est **croissante**, nous déduisons de la première partie du **Théorème** que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
  Supposons sans perte de généralité que la suite (u_{2n}) soit croissante. En particulier $u_0 \leq u_2$. Comme f est décroissante, il s'ensuit que $u_1 \geq u_3$. Comme la suite (u_{2n+1}) est monotone, il en résulte immédiatement qu'elle est décroissante, ce qui prouve que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de monotonies contraires. ▲

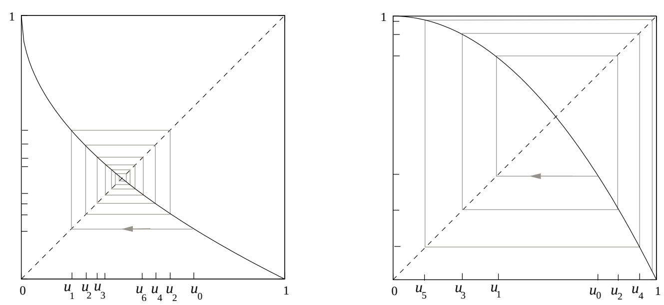
2.c Quatre situations élémentaires

Lors de l'étude d'une suite récurrente, voici quatre situations *élémentaires* qui peuvent arriver :

La fonction est croissante sur un intervalle stable



La fonction est décroissante sur un intervalle stable



Remarque : Dans les cas où f est croissante sur l'intervalle stable I, notez les positions relatives du graphe de f et de l'identité.

Exercice : Étudiez en fonction de la valeur de a la monotonie de la suite définie par

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

3 Étude de la convergence

3.a Limite éventuelle

En ce qui concerne les **limites éventuelles** d'une suite récurrente elles sont à rechercher parmi les *points fixes* de f, ou les extrémités ouvertes (éventuellement infinies) de I.

Théorème 12.22.— Cas d'une itératrice continue —. Soit $f : I \to I$ une fonction **continue** sur un intervalle stable I et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par (12.5).
Si la suite (u_n) est convergente vers $\ell \in I$, **alors** ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution dans I de l'équation :

$$\boxed{f(x) = x}$$

En pratique : si la suite (u_n) a une limite ℓ dans $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors

- soit ℓ est un point fixe de f dans I.
- soit ℓ est une extrémité ouverte, éventuellement infinie de I.

Pour déterminer les limites possibles de la suite u, il vous résolvez l'équation aux points fixes de f :

$$f(x) = x(\iff h(x) = 0) \tag{PF}$$

ce qui permet à tous les coups de restreindre considérablement le nombre de *candidats limite* possibles.

Interprétation graphique : Sur la représentation graphique de f les points fixes réels de f sont les points d'intersection entre le graphe de f est la diagonale. Voyez les quatre situations élémentaires pour une illustration de ce théorème. Remarquez en particulier que même lorsqu'il n'y a qu'un point fixe pour f dans I, la suite (u_n) n'est pas nécessairement convergente vers ce point fixe.

Démonstration ▽

Soit $f : I \to I$ une fonction continue sur l'intervalle stable I.
Soit u la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons que la suite u soit convergente vers $\ell \in I$.
Nous avons d'une part que la suite (u_{n+1}) est extraite de u : par conséquent elle est convergente vers ℓ.
D'autre part, d'après la **caractérisation séquentielle de la continuité**, la suite $f(u_n)$ est convergente vers $f(\ell)$.
Finalement, nous pouvons schématiser la situation de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \swarrow & & \searrow \\ \ell & & f(\ell) \end{array}}$$

Par unicité de la limite, il en résulte que $f(\ell) = \ell$. ▲

Le théorème fondamental ne garantit nullement la convergence de la suite (u_n). Pour une condition suffisante de convergence, on peut utiliser le théorème de la limite monotone lorsque f est croissante :

Proposition 12.23.— Soit $f : I \to I$ une fonction **croissante** sur un intervalle stable et **borné** I. Pour toute valeur initiale $a \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par (12.5) est convergente.

Démonstration ▽

Soit $a \in I$. Comme f est croissante, la suite (u_n) est monotone. De plus, il s'agit d'une suite d'éléments de I. Comme par hypothèse I est borné, (u_n) est donc monotone et bornée. Le **théorème de la limite monotone** permet en ce cas de conclure à la convergence de la suite (u_n). ▲

3.b Cas d'une fonction itératrice strictement contractante

Théorème 12.24.— Soit $f : I \to I$ une fonction lipschitzienne de constante $k \in]0, 1[$, et ℓ un point fixe de f. Alors pour toute valeur initiale $a \in I$, la suite (u_n) définie par (12.5) vérifie les estimations suivantes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|u_{n+1} - \ell\right| \leq k\left|u_n - \ell\right|$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|u_n - \ell\right| \leq k^n\left|u_0 - \ell\right|}$$

Vocabulaire : *une fonction lipschitzienne de constante $k \in]0, 1[$ est dite (strictement) contractante.*

Remarques :

1. Si f est strictement croissante sur I, f admet un unique point fixe (*hors programme*)
2. Si f est strictement contractante sur un segment $[a, b]$ alors f admet un unique point fixe (cf TD 18)

Corollaire 12.25.— Avec les notations précédentes,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell.}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit $a \in I$ fixé et (u_n) la suite définie par la relation (12.5). L'hypothèse de contraction stricte se traduit par la propriété universelle :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, pour majorer $|u_{n+1} - \ell|$, nous pouvons le faire apparaitre comme un accroissement de f. En effet, d'une part, par construction de (u_n), $u_{n+1} = f(u_n)$. D'autre part, comme ℓ est fixe pour f, il vérifie $\ell = f(\ell)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left|u_{n+1} - \ell\right| &= \left|f(u_n) - f(\ell)\right| \\ &\leq k\left|u_n - \ell\right| \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ \left|u_n - \ell\right| \leq k^n \left|u_0 - \ell\right|$.

- **Init.** pour $n = 0$, c'est évident.
- **Hér.** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. En utilisant successivement la première assertion et l'hypothèse de récurrence, j'obtiens

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leq k|u_n - \ell| \\ &\leq k^{n+1}\,|u_0 - \ell| \end{aligned}$$

- **Ccl.** la propriété est vérifiée pour $n = 0$, elle est héréditaire. Par le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier naturel.

Finalement, comme $0 < k < 1$, la suite géométrique $\left(k^n |u_0 - \ell|\right)$ est convergente de limite nulle. La convergence de (u_n) résulte par comparaison de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \left|u_n - \ell\right| \leq k^n \left|u_0 - \ell\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

▲

En pratique : ce théorème permet non seulement d'établir la convergence de la suite mais aussi d'obtenir une estimation sur la vitesse de convergence. Il est très souvent utilisé pour obtenir des valeurs approchée de solutions d'équations. Cette méthode s'appelle la **méthode des approximations successives**.

Pour démontrer que la fonction itératrice est strictement contractante, on utilise souvent le **théorème des accroissement finis**. À titre d'exemple :

Exercice : Soit $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction polynomiale définie par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

1. Montrez que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique racine a réelle. Vérifiez que $a \in [2, +\infty[$.

2. Vérifiez que $\forall x \geq 2,\ P(x) = 0 \iff 2 + \dfrac{1}{x^2} = x$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{{u_n}^2}$.

   a. Montrez que (u_n) converge vers a et que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - a| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

   b. Déduisez-en une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

4 Mise en œuvre

4.a Plan d'étude d'une suite récurrente

Soit $f : I \to I$ une fonction continue sur un intervalle stable et $a \in I$. L'étude complète en fonction de a de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

est longue. En règle générale, l'énoncé devrait vous guider soit vers une étude de la monotonie, soit vers la méthode des approximations successives...

En l'absence totale d'indication dans l'énoncé, vous suivrez pour démarrer l'étude, les étapes suivantes :
$\boxed{1}$ Étude de la fonction f.
$\boxed{2}$ Étude du signe de $h : x \mapsto f(x) - x$ et recherche des points fixes pour f.
$\boxed{3}$ Représentation graphique de f et Id.
$\boxed{4}$ Repérez les intervalles stables pour f pour lesquels f est monotone.
$\boxed{5}$ Discussion finale en fonction de a.

Warning : l'étude graphique est indispensable pour conjecturer le comportement de la suite, mais c'est aussi un avantage déterminant pour repérer les sous-intervalles stables.

4.b Exemples d'étude de suite récurrente

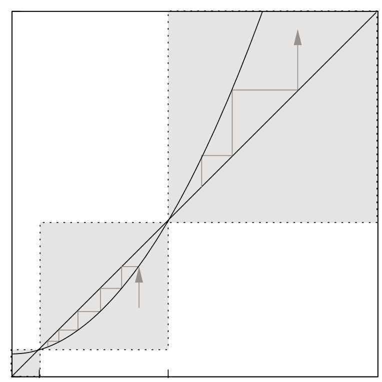
Exemple sérieux : Étudiez en fonction de son premier terme u_0 la suite récurrente définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{u_n^2}{3}$$

Solution $\triangledown$
Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ définie par $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{x^2}{3}$.
$\boxed{1}$ **Étudions la fonction** f *: f est positive et croissante sur $[0, +\infty[$.*
$\boxed{2}$ **Étudions la positivité de** $f - Id$. *On montre que $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f(x) - x = (1/3)(x-1)(x-2)$. Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans un tableau, dans lequel apparaissent le signe de $f - Id$, les points fixes pour f et les variations de f :*
$\boxed{3}$

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$f(x) - x$	$\frac{2}{3}$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nb : *le graphe ci-contre n'est pas exactement celui de f, mais l'allure générale est exactement la même, vous repérez notamment les sous-intervalles de $\mathbf{R}^+$ stables pour f.*



Le tableau ci-dessus contient toutes les informations utiles pour la résolution de cet exercice. Remarquons tout d'abord que f étant croissante sur l'intervalle stable $[0, +\infty[$ la suite (u_n) est monotone. De plus, f étant une fonction polynomiale (continue) si u_n converge, alors c'est nécessairement vers l'un des deux points fixes de f : 1 ou 2.
$\boxed{5}$ *Pour clore l'étude,* **discutons suivant les valeurs de** u_0, *le comportement de la suite u.*

- *si $u_0 \in \{1, 2\}$, ces points étant laissés fixes par f, la suite est constante et donc convergente.*
- *si $u_0 \in [0, 1[$. Comme $f([0, 1[) \subset [0, 1[$, la suite est à valeurs dans $[0, 1[$. En particulier, elle est bornée. De plus comme $f - Id$ est positive sur cet intervalle, la suite est croissante. D'après le* **Théorème** *7.36, la suite est convergente. Elle converge nécessairement vers sa borne $\sup$ qui doit aussi être un point fixe de f. Comme 1 majore la suite u en ce cas, elle ne peut converger vers 2. Donc la suite converge vers 1.*
- *si $u_0 \in]1, 2[$. Comme $f(]1, 2[) \subset]1, 2[$, la suite est à valeurs dans $]1, 2[$. En particulier, elle est bornée. De plus comme $f - Id$ est négative sur cet intervalle, la suite est donc décroissante. D'après le* **Théorème** *7.36, la suite est convergente vers son $\inf$. De plus, elle converge nécessairement vers un point fixe de f. Comme 2 ne minore pas la suite u en ce cas, elle ne peut converger vers 2. Donc la suite converge vers 1.*
- *si $u_0 \in]2, +\infty[$. Comme $f(]2, +\infty[) \subset]2, +\infty[$, la suite est à valeurs dans $]2, +\infty[$. Comme $f - Id$ est positive sur cet intervalle, la suite est donc croissante. D'après le* **Théorème** *7.36, si la suite est convergente, elle converge vers son $\sup$. De plus, elle converge nécessairement vers un point fixe de f. Comme ni 1 ni 2 ne majorent la suite u en ce cas, elle ne peut converger : la suite est donc divergente. Mais en ce cas, d'après le* **Théorème** *7.38 la suite est divergente vers $+\infty$.* ▲

Exemple sévère : Étudiez en fonction de $a \in \mathbf{R}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 = a \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \dfrac{4 - u_n^2}{3} \end{cases}.$$

IV Suites définies implicitement

1 Définition d'une suite implicite

Le **Théorème de la bijection** sert souvent à étudier des suites définies implicitement, c'est-à-dire des suites dont le terme général est solution d'une équation :

$$(E_n) \qquad f_n(x) = 0$$

2 Exemple d'étude d'une suite implicite

Exercice : On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par ;

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f(x) = 2\sqrt{x}\, e^{-x}$$

1. **a.** Etudiez les variations de f, ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle de définition. Présentez ces résultats sous la forme d'un tableau de variations.

b. Montrez que f induit une bijection, notée $f_|$ de $]0, 1/2]$ sur $]0, \sqrt{2/e}]$. Dressez le tableau de variations de l'application réciproque g de $f_|$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Démontrez que l'équation

$$(E_n) \qquad f(x) = \tfrac{1}{n}$$

admet une unique solution dans $]0, \frac{1}{2}]$. On note a_n cette solution.

b. Montrez que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

c. En déduire que (a_n) est convergente et déterminez sa limite.

Solution $\triangledown$

1. **a.** *f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et pour tout x strictement positif,*

$$f'(x) = e^{-x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right] = (1 - 2x)\,\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, \qquad f(x) > 0 \iff x < \frac{1}{2}$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, +\infty[$. Enfin, par opérations algébriques sur des fonctions possédant des limites, j'obtiens $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Résumons ces quelques propriétés de f dans un tableau de variations :

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{2/e}$	$\searrow$	0

b. *La fonction $f_{|} : \left]0, 1/2\right] \to \mathbf{R}^+$ est continue par opérations algébriques sur des fonctions continues et strictement croissante d'après la question précédente. D'après le* **Théorème de la bijection**, *$f_{|}$ réalise une bijection de $\left]0, 1/2\right]$ sur son image $f\left(\left]0, 1/2\right]\right) = \left]0, \sqrt{2/e}\right]$. De plus, l'application réciproque $g : \left]0, \sqrt{2/e}\right] \to \left]0, 1/2\right]$ est elle aussi continue et strictement croissante. J'en déduis :*

x	0		$\sqrt{2/e}$
			$1/2$
g		$\nearrow$	
	0		

2. **a.** *Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Alors $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, $\dfrac{1}{n}$ est dans l'ensemble des images de $f_{|}$. Par conséquent, il admet un unique antécédent par f dans $]0, 1/2]$. Dans la suite, on note a_n ce nombre.*

b. *Soit $n \geq 2$. Remarquons que a_n étant l'unique antécédent de $\dfrac{1}{n}$ par l'application f, nous avons par définition de l'application réciproque g de $f_{|}$:*

$$a_n = g(1/n)$$

Comme la suite $(1/n)$ est décroissante et que g est croissante, il en résulte par composition d'applications monotones que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

c. *D'après le* **Théorème de la bijection**, *g réalise une bijection continue de $]0, \sqrt{2/e}]$ sur $]0, 1/2]$. En particulier, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Comme $(1/n)$ est convergente de limite 0, le* **Théorème de la caractérisation séquentielle de la limite**, *permet d'affirmer que la suite $g(1/n)$ est convergente de limite 0.*
Ainsi, la suite (a_n) est convergente vers 0. ▲

V COMPLÉMENTS : systèmes dynamiques discrets