Chapitre 3

Fonctions numériques : rappels & compléments

Sommaire

OBJECTIFS

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les propriétés générales des fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, étudiées en classe de terminale, notamment

- la notion de bijectivité ;
- les propriétés de symétries ;
- les notions de limites et de continuité ;
- la notion de dérivabilité ;
- la notion d'intégrale en lien avec celle de primitive d'une fonction continue.

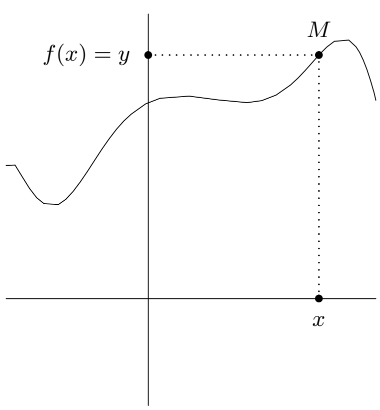
Ces propriétés seront revues ultérieurement dans un cadre plus rigoureux, c'est pourquoi ces propriétés sont le plus souvent accompagnées d'un schéma de démonstration mettant en avant une interprétation intuitive dès que cela est possible.
Dans la dernière partie du chapitre, nous étendons les propriétés et définitions précédentes au cas des fonctions à valeurs complexes.

I Généralités sur les fonctions

Dans toute cette partie I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$. Nous étudions les propriétés des fonctions de I vers $\mathbf{R}$.
Une fonction f de I vers J est un procédé qui à tout élément $x \in I$ associe un unique élément $f(x) \in J$. On note $f : I \to J$.

Vocabulaire : *I est l'ensemble de départ, J est l'ensemble d'arrivée.*

Illustration : on peut représenter une fonction par son graphe.



Le graphe de f est l'ensemble des points M du plan de coordonnées $M(x, y)$ tels que $x \in I$, $y \in J$ et qui vérifient la relation

$$y = f(x)$$

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_f & = & \big\{\big(x, f(x)\big) \,;\, x \in I\big\} \\ \Gamma_f & = & \big\{\big(x, y\big) \in I \times J \mid y = f(x)\big\} \end{array}$$

$f(x)$ est l'image de x par f
x est un antécédent de $f(x)$.

On note $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de I vers J.

1 Opérations algébriques sur les fonctions

1.a Opérations algébriques

Définition : *Deux fonctions $f, g : I \to \mathbf{R}$ sont dites **égales**, et on note $f = g$ si*

$$\textit{pour tout élément } x \in I, \quad f(x) = g(x)$$

Définition : *Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit*

- $f+g \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$
- $f\times g \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x)\times g(x) \end{array}$
- $\lambda f \ : \ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$.

Remarques :

1. On identifie un réel c à la fonction constante égale à c, par exemple, 1 désigne la fonction qui à tout $x \in I$ associe 1.
2. Lorsque f ne s'annule pas sur I, *i.e.* si pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$, on peut définir la fonction $1/f$ qui à tout élément x de I associe l'inverse de $f(x)$.

1.b Composition des applications

Définition : *Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions. On définit la composée $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ par*

$$\textit{pour tout élément } x \in I, \quad g\circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Warning : notez bien que pour que la composée $g \circ f$ soit définie, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de f soit contenu dans l'ensemble de départ de g.

2 Symétries

Les symétries sont essentielles pour l'étude des fonctions : si elles ne résolvent pas les problèmes posés, elles permettent néanmoins de restreindre l'intervalle d'étude. Voici les symétries les plus remarquables pour les fonctions :

2.a Parité

Définition : *Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite*

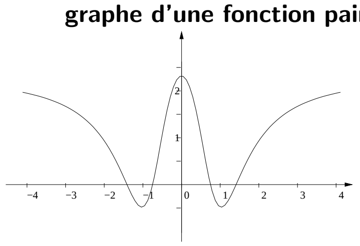
- ***paire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;*
- ***impaire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.*

Exemples :

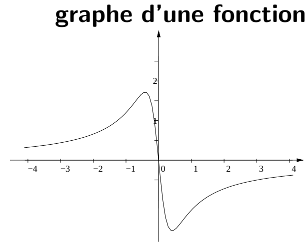
1. Soit $k \in \mathbf{N}$, la fonction puissance $k^{\text{ième}}$ $p_k : x \mapsto x^k$ est paire (resp. impaire) si k l'est.
2. Les fonctions $\cos x$, $x \mapsto x^2$, $x \to |x|$ définies sur $\mathbf{R}$ sont paires.
3. Les fonctions $\sin x$, $x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbf{R}$ sont impaires.

Illustration : f est paire (*resp.* impaire) *ssi* son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (*resp.* par rapport à l'origine).

graphe d'une fonction paire



graphe d'une fonction impaire



Exercice : Soit I un intervalle symétrique par rapport à l'origine contenant 0. Montrez que si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ est impaire, alors $f(0) = 0$.

Proposition 3.1.— Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0. Alors pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, il existe un couple de fonctions (g, h), unique tel que $\begin{cases} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{cases}$.

Démonstration $\triangledown$
La démonstration de ce résultat sera par *analyse-synthèse* :
■ **Analyse :** supposons qu'un tel couple de fonctions existe. En utilisant la parité de g et de h, j'obtiens pour tout élément x de I :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)+h(x) \\ f(-x) &= g(x)-h(x) \end{aligned}$$

Par addition et soustraction membre à membre, il en résulte que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big) \\ h(x) &= \frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big) \end{aligned}$$

Ainsi, si un tel couple (g,h) existe, ces fonctions sont nécessairement définies par les expressions ci-dessus.
■ **Synthèse :** réciproquement, soit g et h les fonctions définies sur I par :

$$\text{pour tout } x\in I,\quad g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

On vérifie que ce couple est solution du problème posé :

- g est paire : en effet, pour tout $x\in I$, $g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(+x)}{2}=g(x)$.
- h est impaire car pour tout $x\in I$, $h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(+x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)$.
- $f=g+h$ puisque pour tout élément $x\in I$,

$$g(x)+h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$$

■ **Conclusion :** par analyse-synthèse, nous avons prouvé l'existence et l'unicité d'un couple de fonctions (g,h) tel que g est paire, h est impaire et $f=g+h$. ▲

2.b Périodicité

Définition : *Soit $T\in\mathbf{R}^{+\star}$. Une fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est dite **T-périodique** si pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x+T)=f(x)$.*

Vocabulaire : *T est appelée période de $f\cdot$*

Remarque : on a alors $f(x+kT)=f(x)$ pour tout $k\in\mathbf{Z}$.

Exemples : Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, la fonction tangente est périodique de période π.

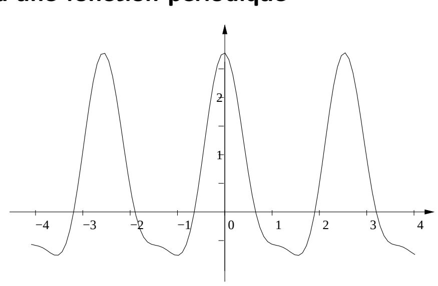
Exercice : Démontrer que la fonction $x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ est périodique.

Solution $\triangledown$
Soit f la fonction définie pour tout réel $x\in\mathbf{R}$ par $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$. $f(x)$ représente donc la partie décimale de x. Montrons que f est périodique de période 1.
Soit donc $x\in\mathbf{R}$. Par les propriétés de la partie entière, il vient $\lfloor x+1\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$. Retranchant $x+1$ aux deux membres de cette égalité, j'obtiens :

$$\lfloor x+1\rfloor-(x+1)=\lfloor x\rfloor-x.$$

Ainsi, $f(x+1)=f(x)$.
Ceci étant vrai pour tout réel x, il s'ensuit que f est 1-périodique. ▲

Illustration : **graphe d'une fonction périodique**



3 Relation d'ordre sur $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$

3.a Comparaison de fonctions

Définition : *Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$ un couple de fonctions.*

- *On note $f \leq g$, lorsque pour tout $x \in I$, $\quad f(x) \leq g(x)$.*
- *On note $f < g$, lorsque pour tout $x \in I$, $\quad f(x) < g(x)$.*

Vocabulaire : *une **fonction** $f \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ est dite **positive** si $f \geq 0$.*

Commentaires : en clair, $f \leq g$ *si et seulement si* le graphe de g est *au-dessus* du graphe de f.

Warning : la *relation d'ordre* définie ci-dessus n'est *pas totale*. Cela signifie deux fonctions f et g définies sur I ne sont pas toujours comparables.

Exercice : Montrez que les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $x^2 + 1$ et $x + 1$ ne sont pas comparables.

Proposition.— Compatibilité avec les opérations —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ des fonctions. On suppose que $f \leq g$. Alors

- pour toute fonction $h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $f + h \leq g + h$
- pour toute fonction positive $h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $f \times h \leq g \times h$

3.b Enveloppes supérieure et inférieure de deux fonctions

Définition : *Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, on définit*

$$\max(f, g) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \max\{f(x), g(x)\} \end{array} \quad \textit{et} \quad \min(f, g) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \min\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

Notation : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on note f^+ et f^-, les fonctions définies par*

$$f^+ = \max(f, 0) \textit{ et } f^- = \max(-f, 0).$$

Ces fonctions positives représentent les parties positives et négatives de f, de sorte que

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ et } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

Exercice : Représentez le graphe de l'application $\max(p, q) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ où p et q sont les fonctions

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - x + 1 \end{array} \quad \text{et} \quad q : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x + 1 \end{array}.$$

3.c Fonctions bornées, majorées et minorées

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction réelle. On dit que*

- *f est majorée s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $f \leq M$.*
- *f est minorée s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que $f \geq m$.*
- *f est bornée s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $|f| \leq M$.*

Remarque : Une fonction réelle $f : I \to \mathbf{R}$ est bornée *si et seulement si* elle est majorée et minorée.

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que*

- *f possède un **maximum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. On note alors $\max\limits_I f = f(a)$.*
- *f possède un **minimum** en $a \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$ On note alors $\min\limits_I f = f(a)$.*

Vocabulaire : $\max\limits_I f$ *est appelé le **maximum** de f sur I. Lorsqu'on souhaite préciser le point a de I tel que $f(a) = \max\limits_I f$, on dira que f prend[1] son maximum au point a.*

1. on dit aussi atteint

4 Fonctions monotones

4.a Définitions

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite*

- ***croissante*** *sur I lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$*
- ***décroissante*** *sur I lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$*
- ***strictement croissante*** *sur I lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$*
- ***strictement décroissante*** *sur I lorsque pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$*

*Une fonction est dite **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I, elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Commentaires : ainsi que je vous l'ai annoncé, la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ améliore souvent la situation. Précisément **les fonctions monotones** (croissantes ou décroissantes) **sont les fonctions compatibles avec la relation d'ordre** :

Retenez que :

Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est **croissante** *si et seulement si* elle **préserve** les inégalités.
Une fonction f est **décroissante**, *si et seulement si* elle **bascule** les inégalités.

En pratique : vous devez savoir utiliser la monotonie d'une fonction pour résoudre une inéquation.

Exemple : Les fonctions de $\mathbf{R}^{+\star}$ dans lui-même définie par $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto x^2$ sont respectivement décroissante et croissante.

4.b Opérations sur les fonctions monotones

D'après la compatibilité de l'ordre avec les opérations de $\mathbf{R}$, nous obtenons :

Proposition.— Opérations sur les fonctions monotones
Soient $f,\ g \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{R}^+$ un réel positif.

- **Si** f et g sont croissantes **alors** $f + g$ est croissante.
- **Si** f est croissante **alors** λf est croissante.
- **Si** f est croissante, **alors** $-f$ est décroissante.
- **Si** f et g sont croissantes et positives, **alors** $f \times g$ est croissante.
- **Si** f et g sont décroissantes et positives, **alors** $f \times g$ est décroissante.

Démonstration $\triangledown$

- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leq x_2$. Comme f et g sont croissantes, il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & \leq & f(x_2) \\ g(x_1) & \leq & g(x_2) \end{array}$$

En additionnant *membre à membre* ces inégalités, il vient :

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2).$$

- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leq x_2$. Comme f est croissante, $f(x_1) \leq f(x_2)$. Par compatibilité de l'ordre avec la multiplication par $\lambda \in \mathbf{R}^+$, il vient $\lambda \times f(x_1) \leq \lambda \times f(x_2)$.
- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leq x_2$. Comme f est croissante, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre. Par compatibilité de l'ordre avec la multiplication par -1, il vient $(-1) \times f(x_1) \geq (-1) \times f(x_2)$.
- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leq x_2$. Vu les hypothèses de monotonie de f et g, il vient

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & \leq & f(x_2) \\ g(x_1) & \leq & g(x_2) \end{array}$$

D'après la compatibilité de la multiplication *membre à membre* pour les inégalités entre réels positifs, il s'ensuit :

$$f(x_1) \times g(x_1) \leq f(x_2) \times g(x_2).$$

- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \le x_2$. Comme f et g sont décroissantes, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & \ge & f(x_2) \\ g(x_1) & \ge & g(x_2) \end{array}$$

Par compatibilité pour la multiplication *membre à membre* des inégalités entre réels positifs, il vient

$$f(x_1) \times g(x_1) \ge f(x_2) \times g(x_2).$$

▲

Exercice : Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions **croissantes** et **négatives** sur I.

1. La fonction $f - g$ est-elle monotone ?

2. La fonction $f \times g$ est-elle monotone ?

Solution ▽

1. *Non ! tous les cas sont dans la nature ! par exemple si f et g sont les fonctions définies sur $[0,1]$ par $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2 - 1$, $f - g$ n'est pas monotone sur $[0,1]$.*

2. *D'après la proposition précédente, $(-f)$ et $(-g)$ sont deux fonctions décroissantes et positives. Il en va de même pour $f \times g = (-f) \times (-g)$.* ▲

Proposition.— Composition des fonctions monotones —. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions monotones. Alors $g \circ f$ est monotone.

- Si f et g sont croissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont décroissantes, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f est croissante, g est décroissante, alors $g \circ f$ est décroissante.
- Si f est décroissante, g est croissante, alors $g \circ f$ est décroissante.

Commentaires : pour bien comprendre cet énoncé, vous devez vous rappeler que les fonctions croissantes préservent les inégalités tandis que les fonctions décroissantes les basculent.

Démonstration ▽

1. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \le x_2$. Comme par hypothèse f est croissante, $f(x_1) \le f(x_2)$. Or $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à J et g est croissante sur J par hypothèse. Il en résulte que $g\big(f(x_1)\big) \le g\big(f(x_2)\big)$.

2. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \le x_2$. Comme par hypothèse f est décroissante, $f(x_1) \ge f(x_2)$. Or $f(x_1), f(x_2)$ appartiennent à J : comme g est décroissante sur J, il en résulte que $g\big(f(x_1)\big) \le g\big(f(x_2)\big)$.

3. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \le x_2$. Comme par hypothèse f est croissante, $f(x_1) \le f(x_2)$. Or $f(x_1), f(x_2)$ appartiennent à J et g est décroissante sur J par hypothèse. Il en résulte que $g\big(f(x_1)\big) \ge g\big(f(x_2)\big)$.

4. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \le x_2$. Comme par hypothèse f est décroissante, $f(x_1) \ge f(x_2)$. Or $f(x_1), f(x_2)$ appartiennent à J et g est croissante sur J par hypothèse. Il en résulte que $g\big(f(x_1)\big) \ge g\big(f(x_2)\big)$. ▲

Défi ! Etudiez les variations de la fonction

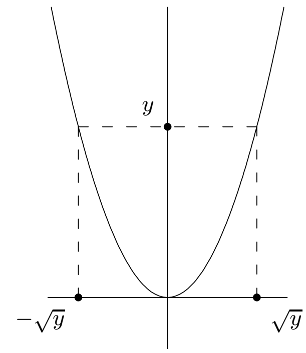
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^{+\star} & \to & \mathbf{R}^{+\star} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1 + e^{-x})}{1 + \exp(x - \frac{1}{x})} \end{array}$$

5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

5.a Définitions

Soit $f : I \to J$ une fonction définie sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I à valeurs dans un intervalle J (une réunion d'intervalles).

Ainsi, tout élément $x \in I$, admet une image, unique $y = f(x)$ dans J. En revanche, étant donné un élément $y \in J$, rien ne garantit, ni l'existence, ni l'unicité, d'antécédents pour y par f. Au contraire, l'exemple suivant montre qu'il ne peut y avoir de réponse simple à cette question : certains éléments de J peuvent ne pas avoir d'antécédents, tandis que d'autres en ont plusieurs.



Exemple : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ et $y \in \mathbf{R}$ fixé. Alors

- si $y < 0$, il n'admet *aucun* antécédent par f ;
- si $y = 0$, il admet comme *unique* antécédent 0 ;
- si $y > 0$, il admet exactement *deux* antécédents $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

Définition : *Une application $f : I \to J$ est dite :*

- ***injective*** *si tout élément y de J a au plus un antécédent dans I.*
- ***surjective*** *si tout élément y de J a au moins un antécédent dans I.*
- ***bijective*** *si tout élément y de J a exactement un antécédent dans I.*

Exemples :

- l'application identité : $id : \begin{array}{ccc} I & \to & I \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est bijective
- l'injection canonique : $j : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$ est injective
- la fonction : $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective

Remarque : les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité dépendent du procédé $x \mapsto f(x)$ mais aussi des intervalles de départ et d'arrivée I et J.

Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée.

- $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ est bijective ;
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ est surjective et non injective ;
- $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ est injective et non surjective ;
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas injective ni surjective.

Remarque :

- lorsque $f : I \to J$ est injective, deux éléments distincts de I ont des images distinctes dans J.
- Une application $f : I \to J$ est bijective *si et seulement si* elle est à la fois injective et surjective.

5.b Bijectivité : point de vue équations

Par définition une fonction $f : I \to J$ est bijective, si tout élément $y \in J$ possède un **unique** antécédent par f dans I. Or un antécédent de y est tout simplement une solution dans I de l'équation $y = f(x)$. Par conséquent :

Proposition 3.2.— Soit $f : I \to J$ une application.

> f est bijective
> *si et seulement si*
> pour tout élément $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I.

Remarque : les notions d'injectivité et de surjectivité se traduisent elles aussi à l'aide des équations $y = f(x)$.

Exercice : Montrez que l'application $f : \begin{array}{ccc}]-\infty;1[& \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \ln(1-t) \end{array}$ est bijective.

Solution $\triangledown$

Soit $y \in \mathbf{R}$, un nombre réel quelconque. Montrons que l'équation

$$f(x) = y \tag{3.1}$$

admet une solution unique. Raisonnons par équivalences, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\textit{si et seulement si} \quad \ln(1-x) = y \\ &\textit{si et seulement si} \quad 1 - x = \exp(y) \\ &\textit{si et seulement si} \quad x = 1 - \exp(y) \in]-\infty; 1[\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute valeur de $y \in \mathbf{R}$ l'équation (3.1) admet pour solution, unique, le nombre réel strictement inférieur à 1 : $x = 1 - \exp(y)$. ▲

5.c Bijectivité : point de vue application réciproque

Soit $f : I \to J$ bijective.

- Comme f est une application tout élément x de I a une unique image $y = f(x)$ dans J.
- Comme f est une bijection tout élément y de J a un unique antécédent x dans I.

Ce procédé qui à tout élément $y \in J$ associe son unique antécédent par f définit une nouvelle fonction de J vers I, appelée *application réciproque* de f :

Définition : *Soit $f : I \to J$ une **bijection**. On définit une nouvelle application $f^{-1} : J \to I$ appelée **application réciproque** de f, en posant pour tout $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f.*

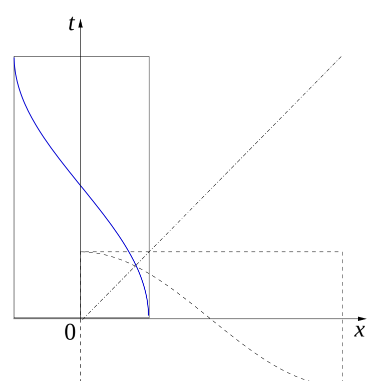
Warning : ne confondez pas l'application réciproque d'une bijection, notée f^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{f}$ ...

Corollaire 3.3.— Soit $f : I \to J$ une **bijection**. Pour tout couple (x, y) de réels,

$$\boxed{\begin{cases} x \in I \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y \in J \\ x = f^{-1}(y) \end{cases}}$$

Illustration :

Dans un reprère orthonormé, les graphes d'une bijection f et de son application réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice. En effet, (x, y) appartient au graphe de f *si et seulement si* $y = f(x)$. D'après le **Corollaire** ci-dessus, ceci équivaut au fait que $x = f^{-1}(y)$, ce qui revient à dire que (y, x) appartient au graphe de f^{-1}. ☺



Exemple : la fonction $\ln : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est bijective, son application réciproque est $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$.

En pratique : lorsqu'on vous demande de prouver que f est bijective **et** déterminer son application réciproque, le point de vue équation s'avère particulièrement efficace.

Exercice : Montrez que l'application $f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-3}$ est bijective et déterminez son application réciproque.

Solution $\triangledown$

Soit $y \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ fixé. Résolvons dans $\mathbf{R} \setminus \{3\}$ l'équation $f(x) = y$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad & \textit{si et seulement si} \quad \frac{2x+3}{x-3} = y \\ & \textit{si et seulement si} \quad (y-2)x = 3(y+1) \\ & \textit{si et seulement si} \quad x = 3\,\frac{y+1}{y-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $y \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ fixé, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution. D'après la **Proposition** *6.14, ceci signifie que $f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}$ est bijective et que son application réciproque est*

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbf{R} \setminus \{3\} \\ y & \mapsto & 3\,\dfrac{y+1}{y-2} \end{array}.$$

▲

Vous pouvez[2] noter sur cet exemple que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et que pour tout $y \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f \circ f^{-1}(y) = y$. Autrement dit

$$f \circ f^{-1} = Id_{\mathbf{R} \setminus \{2\}} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_{\mathbf{R} \setminus \{3\}}$$

Il s'agit d'un fait général :

Corollaire 3.4.— Soit $f : I \to J$ une bijection, alors pour tout couple $(x, y) \in I \times J$,

$$\boxed{f \circ f^{-1}(y) = y \text{ et } f^{-1} \circ f(x) = x}$$

Commentaires : autrement dit, $f \circ f^{-1} = id_J$ et $f^{-1} \circ f = id_I$.

Démonstration ▽
Soit $(x, y) \in I \times J$.

- $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f dans I, par conséquent, son image par f vaut y !
- $f(x)$ est l'image de x par f, par conséquent, son unique antécédent par f dans I est x !! ▲

5.d Stricte monotonie et injectivité

La proposition suivante exprime la compatibilité des fonctions monotones avec l'ordre appliquée à l'étude de l'injectivité. Ces propriétés seront utilisées dans la démonstration du **Théorème de la bijection**, (cf **Théorème** 3.12).

Proposition 3.5.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Alors

- f est strictement croissante *si et seulement si* f est croissante et injective.
- f est strictement décroissante *si et seulement si* f est décroissante et injective.

Démonstration ▽
Les deux assertions se traitent de façon analogue, je démontre la première :

- Supposons que $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction strictement croissante. Il est clair que f est croissante. Montrons par l'absurde que f est injective. **Supposons au contraire** qu'il existe un élément $y \in \mathbf{R}$ ayant deux antécédents distincts, x_1 et x_2. Comme la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ est totale, deux cas se présentent :
  - soit $x_1 < x_2$, auquel cas, au vu de l'hypothèse de monotonie stricte, $f(x_1) < f(x_2)$.
  - soit $x_2 < x_1$, auquel cas la stricte monotonie de f impose que $f(x_2) < f(x_1)$.

  Dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui **contredit** le fait que x_1 et x_2 sont des antécédents de y.

2. *faites-le maintenant !*

- Réciproquement, supposons f croissante et injective et montrons que f est strictement croissante. Soit donc $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$, nous montrons que $f(x_1) < f(x_2)$. La monotonie de f entraîne que $f(x_1) \leq f(x_2)$, il s'agit donc de démontrer -par l'absurde- que cette inégalité est stricte. **Supposons au contraire** que $f(x_1) = f(x_2)$, l'hypothèse d'injectivité de f montre que ceci n'est possible que lorsque $x_1 = x_2$. Ce qui **contredit** le fait que $x_1 < x_2$.

▲

Corollaire 3.6.— Soit $f : I \to J$ une application monotone et bijective.
L'application réciproque f^{-1} de f est strictement monotone, et de même sens de variation que f.

Exemple : les fonctions ln et exp sont des bijections strictement croissantes, réciproques l'une de l'autre.

Démonstration ▽
Supposons, pour fixer les idées, que f est décroissante et bijective, donc strictement décroissante. Soit $(y_1, y_2) \in J^2$ tels que $y_1 < y_2$. On montre que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.
Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Démontrons **par l'absurde** que $x_1 > x_2$.
Supposons *au contraire* que $x_1 \leq x_2$ Comme f est décroissante, ceci entraîne que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est-à-dire que $y_1 \geq y_2$ ce qui *contredit* notre hypothèse. ▲

II Limites et continuité des fonctions réelles

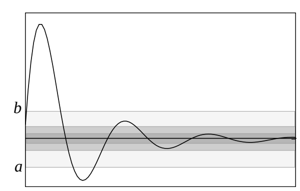
1 Notions de limites

1.a Limite finie en $+\infty$

En classe de terminale, vous avez défini la notion de limite finie en $+\infty$:

Définition : *Soit I un intervalle non majoré de $\mathbf{R}$, $\ell \in \mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.*

Illustration :
Fixons un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant ℓ. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, pour x assez grand, le graphe de f est entièrement contenu dans la bande $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in I, y \in]a, b[\}$. Mais ceci ne résume pas la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
En effet, le point important c'est que ce principe reste valable pour n'importe quel choix de l'intervalle $]a, b[$. Par exemple, si je recommence avec un intervalle $10\ milliards^{10\ milliards}$ fois plus petit, je dois retrouver le même dessin. Il n'est donc qu'une possibilité pour représenter le graphe d'une telle fonction il doit s'écraser sur la droite $y = \ell$.



Commentaires : en clair, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie que $f(x)$ est **arbitrairement proche** de ℓ **pourvu que** x soit **suffisamment grand**.

En ce cas, il faut traduire x est suffisamment grand par suffisamment proche de $+\infty$.

1.b Notions de voisinages

Pour généraliser la notion de limite, il convient de donner un sens précis à la «proximité »de x. C'est la notion de voisinages :

Définition : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, a un élément de I ou une extrémité, éventuellement infinie de I.*

- *si a est un élément de I ou une borne réelle de I, on appelle **voisinage** de a dans I toute intersection de I avec un intervalle **ouvert** contenant a.*
- *si $a = -\infty$, on appelle **voisinage** de a dans I toute intersection de I avec un intervalle **ouvert** non minoré.*
- *si $a = +\infty$, on appelle **voisinage** de a dans I toute intersection de I avec un intervalle **ouvert** non majoré.*

Question : donnez un voisinage de 0 de $\frac{1}{2}$ et de 1 dans $I = [0, 1[$.

1.c Notions de voisinages

La notion de voisinage permet de présenter en une seule assertion les différentes notions de limite :

Définition : Limites d'une fonction —. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, a un élément de I ou une borne, éventuellement infinie, de I et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.*
*On dit que f **admet** ℓ **comme limite en** a si $f(x)$ est **arbitrairement** proche (au sens des voisinages) de ℓ pourvu que a soit **suffisamment** proche (au sens des voisinages) de a.*

Commentaires : Cette définition de limite reste intuitive, elle sera *quantifiée* plus rigoureusement dans la suite du cours.

2 Opérations sur les limites

2.a Opérations algébriques

Théorème 3.7.— opérations algébriques sur les limites —. Soit $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ deux fonctions réelles définies sur I, a un élément de I ou une extrémité de I, $(\ell, k) \in \bar{\mathbf{R}}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ un nombre réel.

- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = k$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + k$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = k$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = \ell \times k$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\ell}$.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = k \neq 0$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell}{k}$.

pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Rappels : les expressions $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(\pm\infty)$, $\dfrac{1}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ ne sont pas définies, il s'agit de formes indéterminées. En revanche, on **convient** que $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

2.b Composition des limites

En pratique, on a très souvent recours au calcul de limite par

Théorème 3.8.— Changement de variable —. Soit $y : I \to J$ et $f : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions, a un élément de I ou une extrémité de I , b un élément de J ou une extrémité de J et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\textbf{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} y(x) = b \\ \bullet\ \lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f\circ y(x) = \ell}$$

En pratique : pour étudier la limite au point a de $f(y(x))$,

- posez $y = y(x)$ et vérifiez $y(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.
- étudiez, $f(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell$.

Vous concluez par **composition des limites** que $\lim\limits_{x\to a} f\big(y(x)\big) = \ell$.

Exercice : Etudiez la limite en $+\infty$ de $\sin(e^{-x})$.

Solution ▽

Posons $y(x) = e^{-x}$. On a $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{y\to 0} \sin(y) = 0 \end{array}\right)$. *Par composition des limites, il s'ensuit que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(e^{-x}) = 0$. ▲

3 Fonctions continues sur un intervalle

3.a Continuité ponctuelle, continuité sur un intervalle

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.*

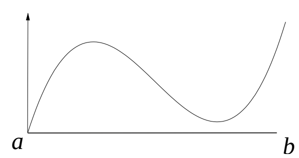
- *On dit que f **est continue au point** a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f **est continue sur** I si f est continue en tout point a de I.*

Exemples : les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, les fonctions exp et ln sont continues sur leurs intervalles respectifs de définition.

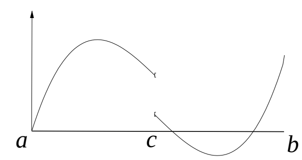
Notation : $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}) = \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ *désigne l'ensemble des fonctions continues sur I.*

Interprétation graphique : f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Autrement dit, le graphe est un trait *continu*.

Illustration :



it's continuous! ⌣



it's not continuous! ⌢

3.b Théorème des valeurs intermédiaires

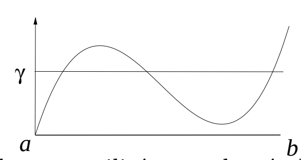
Ainsi, que nous l'avons noté, le graphe d'une fonction continue sur un intervalle est *sans trou*. Par conséquent, nous en déduisons :

Théorème 3.9.— Théorème des valeurs intermédiaires —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points de I tels que $a \leq b$. Alors f prend toute valeur γ, intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$:

> Pour toute valeur γ, comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Commentaires : en clair, f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve en images ▽
La courbe représentative de f va de $f(a)$ à $f(b)$. Comme par hypothèse γ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, elle coupe nécessairement la droite d'équation $y = \gamma$ en (au moins) un point entre a et b. ▲



Le théorème des valeurs intermédiaires est généralement utilisé pour la résolution d'une équation du type $f(x) = 0$, il s'énonce alors de la façon suivante :

Corollaire 3.10.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

> **Si** $f(a) \times f(b) \leq 0$, **alors**, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Démonstration ▽
Comme $f(a) \times f(b)$ est négatif, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, ainsi $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq 0 \leq f(a)$. Dans tous les cas, 0 est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. ▲

En pratique : ce théorème **existentiel** sert à démontrer l'existence d'une solution (au moins) de l'équation sans avoir besoin de la calculer. Pour utiliser le TVI dans ce contexte :

$\boxed{1}$ vous traduisez le problème (existentiel) posé sous la forme d'une équation $f(x) = 0$.

$\boxed{2}$ vous vérifiez que f est continue.

$\boxed{3}$ vous vérifiez que f change de signe.

$\boxed{4}$ TVI *applies and you're done !*

Exercice : Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrez que f possède au moins un *point fixe* dans $[a,b]$, *i.e.*

$$\exists c \in [a,b], \quad \text{tel que } f(c) = c.$$

Solution ▽

Le problème posé consiste à démontrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$, soit encore

$$f(x) - x = 0$$

- *soit $g : [a,b] \to [a,b]$ la fonction définie pour tout $x \in [a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$*
- *g est continue comme somme de telles fonctions*
- *Comme $f(a) \in [a,b]$, on a en particulier, $f(a) \geq a$, ce qui revient précisément à dire que $g(a) \geq 0$. De même $f(b) \in [a,b]$, donne $g(b) \leq 0$. Ainsi, la fonction g change de signe entre a et b.*
- *D'après le TVI, 0 est une valeur intermédiaire entre $g(a)$ et $g(b)$. Par conséquent, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, soit encore,*

$$f(c) = c$$

▲

D'un point de vue théorique, on peut encore reformuler la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires à l'aide de l'*ensemble des images* de f.

Notation : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, on désigne par $f(I)$ l'ensemble des images des éléments de I par f :*

$$f(I) = \{f(x)\,;\; x \in I\} = \{y \in J \;\mid\; y \text{ a un antécédent par } f\}$$

On visualise aisément l'ensemble des images sur le graphe en repère orthonormal : il s'agit simplement du projeté orthogonal du graphe sur l'axe des ordonnées.
Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue, c'est-à-dire si son graphe est un trait continu, en ce cas, l'ensemble des images $f(I)$ n'a *pas de trous* ... Il s'agit donc, comme nous l'avons noté au **Chapitre 1**, d'un intervalle.
Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires s'énonce-t-il encore :

Corollaire 3.11.— Image continue d'un intervalle —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. L'image de I par f est un intervalle de $\mathbf{R}$.

3.c Théorème de la bijection

Théorème 3.12.— Théorème de la bijection —. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application **continue et strictement monotone** sur I. Alors

- $f(I)$ est un intervalle, noté J
- $f : I \to J$ est une bijection de I sur J,
- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

Preuve en images ▽

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

- D'après le **Théorème des valeurs intermédiaires**, $f(I)$ est un intervalle J de $\mathbf{R}$.
- Comme f est strictement monotone, elle est injective d'après la **Proposition** 3.5. Ainsi, f induit une application $f_| : I \to J$ qui est injective car f l'est et surjective. Il s'agit donc d'une bijection.
- L'application induite, f, étant bijective, elle possède une bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ qui est strictement monotone et de même monotonie que f d'après la **Proposition** 3.6.
- La continuité de l'application réciproque sera établie rigoureusement plus tard, pour l'instant, contentons-nous de remarquer que les graphes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé étant symétriques par rapport à la première diagonale, le graphe de f^{-1} peut être tracé sans lever le crayon.

▲

En pratique : le théorème de la bijection est utile pour prouver que $f : I \to \mathbf{R}$ «réalise une bijection sur un intervalle à préciser», à l'aide du tableau suivant :

	$I = [a, b]$	$I =]a, b]$	$I = [a, b[$	$I =]a, b[$
$f \nearrow$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) =]\lim\limits_a f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(a), \lim\limits_b f[$	$f(I) =]\lim\limits_a f, \lim\limits_b f[$
$f \searrow$	$f(I) = [f(b), f(a)]$	$f(I) = [f(b), \lim\limits_a f[$	$f(I) =]\lim\limits_b f, f(a)]$	$f(I) =]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f[$

Corollaire 3.13.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

Pour toute valeur γ, comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$, **unique**, tel que $f(c) = \gamma$.

Exercice : On considère la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}^{+\star} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x - 2 + \ln x \end{array}$.

1. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbf{R}^{+\star}$ sur un intervalle que vous préciserez.
2. Que pouvez-vous en déduire pour l'équation $f(x) = 0$?

III Dérivation des fonctions réelles

1 Notions de dérivée

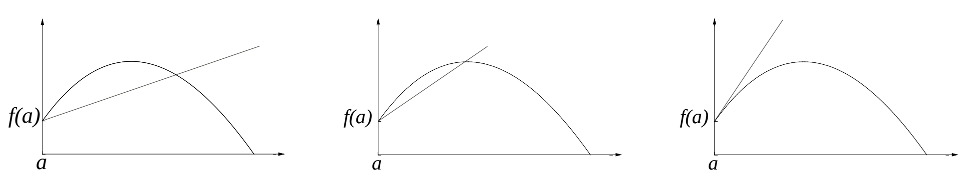
1.a Nombre dérivé

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est* ***dérivable*** *au point a lorsque les taux de variation de f au point a possèdent une limite finie au point a.*
En ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \neq a \\ x \to a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle le ***nombre dérivé*** *de f en a.*

En pratique : pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point a et cacluler le cas échéant le nombre dérivée, on effectue souvent le changement de variable $x = a + h$. On a alors $f'(a) = \lim\limits_{\substack{h \neq 0 \\ h \to 0}} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Commentaires : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la corde d'extrémités $A(a, f(a))$ et $X(x, f(x))$. Le nombre dérivé de f correspond donc à la *pente limite*.

Illustration : **la dérivée est la limite des taux de variation**



Exemple : La fonction affine $x \mapsto dx + c$ est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$ et son nombre dérivée est d.

Exercice : Soit $\begin{array}{rccl} f : & \mathbf{R}^{+} & \to & \mathbf{R}^{+} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Montrez que f est dérivable en tout point $a \in \mathbf{R}^{+\star}$ et que pour tout $a > 0$

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Solution ▽

Soit $a > 0$. Pour étudier les quotients $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$, on peut multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction racine carrée au point a il en résulte alors aisément que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

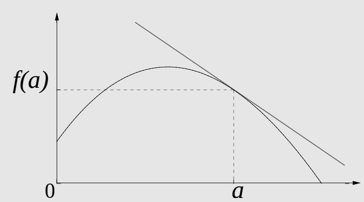
▲

1.b Droite tangente

Proposition 3.14.—
Si $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable au point a, alors la droite d'équation

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

est tangente au graphe Γ_f au point d'abscisse a.



Démonstration ▽
Cette propriété sera démontrée dans le cadre plus général de l'étude des tangentes des courbes planes (**Chapitre 7**). ▲

1.c Fonction dérivée

Définition : *f est dite **dérivable sur** I, si elle est dérivable en tout point de I. La fonction*

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f'(x)\end{array}$$

*qui à tout point $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est la **fonction dérivée** de f.*

Exemples :

- les fonctions cos, sin, tan , exp et ln sont dérivables sur leurs intervalles de définition respectifs.
- La fonction $|x|$ n'est pas dérivable en 0 : son graphe possède un point anguleux.

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère la fonction $p_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par pour tout $x \in \mathbf{R}$, $p_n(x) = x^n$. Montrez que p_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $p'_n = np_{n-1}$.

Solution ▽

Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \neq a$. L'identité géométrique donne :

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \times a^{n-k-1}$$

Chacun des monômes $x \mapsto a^{n-k-1}x^k$ est une fonction (polynomiale donc) continue en a. Par suite, pour tout $k \in \{0, n-1\}$,

$$\lim_{x\to a} a^{n-k-1}x^k = a^{n-1}$$

Par opérations sur les limites, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

▲

2 Opérations sur les dérivées

2.a Opérations algébriques

Proposition 3.15.— Opérations algébriques sur les dérivées —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. On suppose que f et g sont dérivables dans un intervalle I. Alors

- $\lambda \cdot f$ est dérivable sur I et $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'$
- $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
- $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ si g ne s'annule pas dans I

2.b Composée de fonctions dérivables

Proposition 3.16.— Règle de dérivation en chaîne —. Soit $g : J \to \mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$, telles que $f(I) \subset J$. **Si** f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, **alors** $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(g \circ f)' = \big(g' \circ f\big) \times f'}$$

Remarque : on peut itérer cette formule : $(h \circ g \circ f)' = h' \circ g \circ f \times g' \circ f \times f'$.

Exercice : Soit $u : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. Exprimez en fonction de u et de u', les dérivées de u^n et e^u.

2. Si de plus u est strictement positive, exprimez en fonction de u et de u', les dérivées de $\sqrt{u}$, $\ln u$.

2.c Dérivée d'une bijection réciproque

En dérivant la relation, $f \circ f^{-1} = Id_J$, nous en déduisons :

Proposition 3.17.— Dérivabilité de l'application réciproque d'un bijection —. Soit $f : I \to J$ une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J. **Si** f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Exemple : Comme nous l'avons préalablement établi, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbf{R}^{+\star}$ et sa fonction dérivée est donnée pour tout $x > 0$ par :

$$\left(\sqrt{\ }\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Nous pouvons aussi retrouver cette formule en se rappelant que la fonction racine carrée n'est autre que la bijection réciproque de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}^+$.

3 Propriétés des fonctions dérivables

3.a Lien fondamental avec la continuité

Théorème 3.18.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$.

Si f est dérivable au point a, **alors** f est continue au point a.

Nb : La réciproque de cette proposition est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en ce point.

3.b Liens avec la monotonie

Théorème 3.19.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial[3] I.

- f est croissante sur I *si et seulement si* $f' \geq 0$.
- f est décroissante sur I *si et seulement si* $f' \leq 0$.
- f est constante sur I *si et seulement si* $f' = 0$.

Corollaire 3.20.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- **si** $f' > 0$, **alors** f est strictement croissante sur I.
- **si** $f' < 0$, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Remarques :

1. Dans chacune de ces assertions, le fait que I soit un intervalle. Par exemple la fonction inverse, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$, et de dérivée strictement négative. Pourtant elle n'est absolument décroissante sur $\mathbf{R}^\star$.
2. On peut montrer que si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points d'annulation, f est strictement croissante.

En pratique : ces résultats sont utilisés pour dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable, mais aussi pour établir une inégalité.

4 Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, sa dérivée définit une fonction $f' : I \to \mathbf{R}$. Si de plus, f' est dérivable, on dit que f est deux fois dérivable sur I. On note alors $f'' : I \to \mathbf{R}$ la fonction dérivée de la dérivée de f ...
Plus précisément,

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. On convient que f est 0 fois dérivable et que $f^{(0)} = f$. Si $n \in \mathbf{N}^\star$, on dit que f est n-fois dérivable dans I si :*

- *f est $n-1$ fois dérivable dans I*
- *$f^{(n-1)}$ est dérivable dans I.*

En ce cas, on note $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemple : $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Notation :

- *$\mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables et de dérivée $n^{\text{ième}}$ continue sur I.*
- *$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.*

Exemples : on démontre aisément par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^\star$ que les fonctions usuelles :

- fonctions polynomiales
- les exponentielles,
- les logarithmes,
- les fonctions trigonométriques sinus, cosinus, tangente,

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs intervalles respectifs de définition.

IV Extension aux fonctions à valeurs complexes

1 Parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe

Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.
D'après l'unicité de la notation algébrique des nombres complexes, pour tout réel $x \in I$, $f(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

où u et v sont deux fonctions réelles définies sur I.

Définition : *Les fonctions u et v sont appelées parties réelle et imaginaires de f.*
On note $u = \mathfrak{Re}\, f$ et $v = \mathfrak{Im}\, f$.

Exemple : La fonction exponentielle imaginaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$$

est une fonction d'une variable réelle à valeur complexe. Ses parties réelle et imaginaire sont $\mathfrak{Re}\,\varphi = \cos$ et $\mathfrak{Im}\,\varphi = \sin$

2 Continuité

Définition : *Une fonction à valeurs complexes $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$ est dite* ***continue au point*** *a (resp. continue sur I) si ses parties réelles et imaginaires le sont.*

Exercice : Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. On définit $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^\star$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ f_\alpha(x) = e^{\alpha x}.$$

Montrez que f_α est continue sur $\mathbf{R}$.

3 Dérivation

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbf{C}$ est dite* ***dérivable au point*** *$a \in I$ si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. En ce cas*

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

est appelé le nombre[4] *dérivée de f en a.*

Définition : *Une fonction $f : I \to \mathbf{C}$ est dite de* ***classe*** *$\mathcal{C}^n$ sur I si ses parties réelles et imaginaires u et v le sont. Et dans ce cas,*

$$\textit{pour tout } k \in \{0, .., n\},\ \textit{pour tout } x \in I,\ \ f^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x).$$

Théorème 3.21.— Soit $\alpha : I \to \mathbf{C}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On définit la fonction $f : I \to \mathbf{C}$ par $x \mapsto e^{\alpha(x)}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans I et

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \left(e^{\alpha(x)}\right)^{\prime\,\text{ABUS}} = \alpha'(x)e^{\alpha(x)}}$$

4. complexe

V COMPLÉMENTS : Étude de fonctions

Le plan d'étude d'une fonction est comme suit :

$\boxed{1}$ Ensemble de définition, ensemble d'étude

$\boxed{2}$ Étude de la continuité (si nécessaire)

$\boxed{3}$ Étude de la dérivabilité (si nécessaire)

$\boxed{4}$ Variations

$\boxed{5}$ Étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition

$\boxed{6}$ Tracé de la courbe représentative Γ_f.

Domaine de définition et domaine d'étude

Domaine de définition

La fonction à étudier est construite à par opérations, à partir de fonctions usuelles. Vous en déduisez le domaine de définition D_f de f. En général, les théorèmes "OPA"(opérations algébriques) sur les fonctions continues ou dérivables permettent directement à la continuité et à la dérivabilité de f.

Exemple : $f(x) = \ln[x(x-1)]$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Domaine d'étude

Lorsque f est T-périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur T, par exemple $D_f \cap [0, T[$, et compléter par symétrie.
Il est possible de restreindre le domaine d'étude lorsque f est paire, impaire. Plus généralement, s'il existe $a \in D_f$ tel que D_f est symétrique par rapport à a et

- ▷ si pour tout x, $f(2a - x) = f(x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de Γ_f. On peut restreindre l'étude à $D_f \cap [a, +\infty[$ et compléter ensuite par symétrie.
- ▷ si pour tout x, $f(2a - x) = 2f(a) - f(x)$, alors le point $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ est centre de symétrie de Γ_f. On peut restreindre l'étude à $D_f \cap [a, +\infty[$ et compléter ensuite par symétrie.

Exemple : La fonction $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ par opérations algébriques. De plus, f est paire et π-périodique. On restreint l'étude à $[0, \pi/2]$.

Étude de la continuité aux points particuliers

Parfois les théorèmes "OPA" sur les fonctions continues ne permettent pas de conclure. Des études particulières sont alors nécessaires.
C'est le cas, notamment, lorsque la fonction f est définie par des expressions différentes à gauche et à droite d'un point a.

Exemple : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(0) = 0$, et pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $f(x) = \begin{cases} x(1 - \ln x) & \text{si} \quad x > 0 \\ x \ln(1 - 1/x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

En ce cas, vous revenez à la définition, ou vous utilisez les limites à droite et à gauche :

Proposition 3.22.— si f est définie au point a.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \begin{cases} \bullet \displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \\ \bullet \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \end{cases}}$$

Exercice : Étudiez la continuité de la fonction définie dans l'exemple précédent.

Exercice : Étudiez la continuité de la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Étude de la dérivabilité

Comme pour la continuité, la question est souvent réglée par OPA sur des fonctions dérivables. Néanmoins, une étude particulière est parfois nécessaire.
Pour étudier la dérivabilité en un point a du domaine de définition, vous pouvez

- revenir à la définition et étudier la limite des taux de variations $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- étudiez les dérivées à gauche et à droite au point a : lorsqu'elles existent et sont finies, il s'agit des limites :

$$f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Proposition 3.23.— **S**'il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $f'_g(a) = f'_d(a) = d$, **alors**

$$f \text{ est dérivable au point } a \text{ et } f'(a) = d.$$

Vocabulaire : *Si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent mais sont différentes, on dit que le graphe de f présente un* ***point anguleux****.*

Exercice : Etudiez la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.

Théorème 3.24.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue dans I et dérivable dans $I \setminus \{a\}$.

- **S**'il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} f'(x) = d$, **alors** f est dérivable en a et $f'(a) = d$
- **Si** $\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable en a et $\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$.

Exercice : Etudiez la dérivabilité de $f(x) = (x-1)\mathrm{Arcsin}\, x$.

Variations

Vous résolvez l'inéquation $f'(x) \geq 0$. Vous en déduisez, grâce au **Théorème** 11.26, les variations de f.

Exercice : Etudiez les variations de $f(x) = x + \sqrt{3x(8-x)}$.

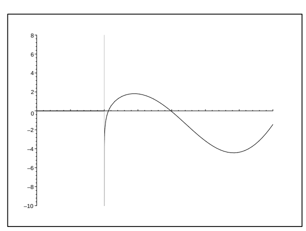
Étude aux bornes

L'étude des branches infinies sert à préciser l'allure de la courbe représentative d'une fonction au voisinage des bornes de l'intervalle. Ces bornes peuvent être réelles ou infinies. Nous distinguons deux notions : les asymptotes et les branches paraboliques.

Si a est une borne réelle du domaine de définition

Il s'agit de d'étudier $\lim_{x\to a} f(x)$, où a est une borne réelle du domaine de définition. On suppose de plus que f n'est pas définie au point a.

Définition : *S'il existe un nombre réel $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, on dit que f est prolongeable par continuité au point a.*

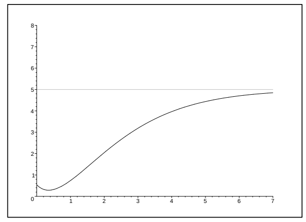


Définition : *On dit que la droite d'équation $x = a$ est* ***asymptote verticale*** *à $\mathscr{C}_f$ si $\lim_{x\to a} f = \pm\infty$.*

Exemple : La fonction $\ln(x-2) + x \ \sin x$ admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale.

Si $+\infty$ est une borne du domaine de définition

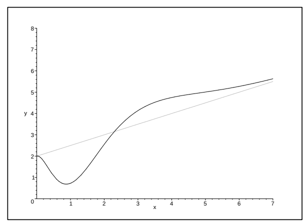
Asymptote horizontale



Définition : *On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est* ***asymptote horizontale*** *en $+\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.*
On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est ***asymptote horizontale*** *en $-\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.*

Exemple : La fonction $5 - \exp(-x + \sqrt{3x+1})$ admet la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

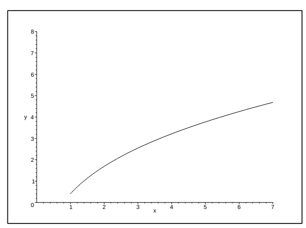
Asymptote oblique



Définition : *On dit que la droite d'équation $y = a\ x + b$ ($a \in \mathbf{R}^\star$, $b \in \mathbf{R}$) est* ***asymptote oblique*** *en $+\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0$.*
On dit que la droite d'équation $y = a\ x + b$ ($\in \mathbf{R}^\star$ et $b \in \mathbf{R}$) est ***asymptote oblique*** *en $-\infty$ à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0$.*

Exemple : La fonction $2 + \frac{1}{2}\ x + 5x^2(x-2)\ \exp(-x)$ admet la droite d'équation $y = 2 + \frac{1}{2}\ x$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

Branche parabolique de direction (Ox)

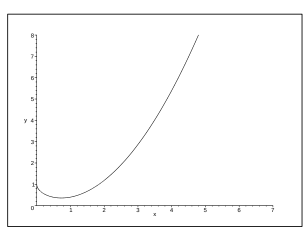


Définition : *On dit que $\mathscr{C}_f$ présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique*** *(Ox) en $+\infty$ si :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Exemple : La fonction $\ln x + \sqrt{2\,x} - 1$ présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) en $+\infty$.

Branche parabolique de direction (Oy)



Définition : *On dit que $\mathscr{C}_f$ présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique*** *(Oy) en $+\infty$ si :*

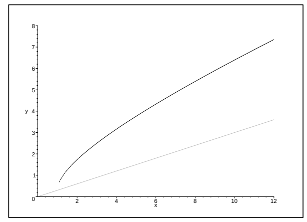
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Exemple : La fonction $1 - \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$ présente une branche parabolique de direction asymptotique (Oy) en $+\infty$.

Branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$

Définition : *On dit que $\mathscr{C}_f$ présente une* ***branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation*** *$y = ax$ en $+\infty$ si :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$



Exemple : Le graphe de la fonction $\frac{x}{2} + \sqrt{2\,x - 2}$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ en $+\infty$.

Recherche des branches infinies

Pour l'étude des branches infinies, pensez avant tout à utiliser les définitions, car l'énoncé vous guide souvent. Si ce n'est pas le cas, vous procédez de la manière suivante :

- Au voisinage d'un point $a \in \bar{I}$ (une borne réelle de l'intervalle) :
  - $\rightsquigarrow$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale.
- Au voisinage d'une borne infinie de l'intervalle, par exemple $+\infty$:
  - $\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale.
  - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, il faut poursuivre l'analyse ...
    - ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox)
    - ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)
    - Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R}^\star$, il faut poursuivre l'analyse ...
    - ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$
    - $\rightsquigarrow$ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbf{R}$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe.

Exercice : Recherchez les asymptotes obliques des courbes d'équations

1. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$
2. $y = \ln(3 + \operatorname{sh} x)$

Tracé de la courbe

La figure doit comporter les tangentes horizontales, les tangentes particulières, les asymptotes.

Exercices

Exercice : Etudiez et représentez

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$
2. $f(x) = \sin^2 x + \cos x.$
3. $f(x) = x + \ln(1 + e^x).$