PROGRAMME DE COLLE S01 BIS

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE

■ ■ ■ Le cercle trigonométrique

On note $x \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. On pose

- $\cos(x) = \overline{OH}$
- $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$

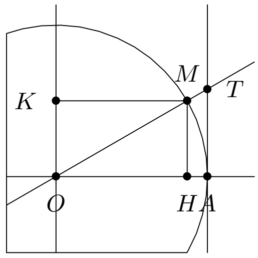

Tableau de valeurs

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Comme M est sur le cercle trigonométrique, on a

Proposition*.— Pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\blacksquare \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\blacksquare 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

■ ■ ■ Propriétés de symétrie

Proposition*.— Symétries —. Les fonctions sin et cos vérifient les propriétés de symétrie suivantes :

- $\cos(2\pi + x) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(2\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

■ ■ ■ Formules d'addition

Proposition*.— Formules d'addition —. pour tous a et b (tels que les expressions suivantes sont bien définies)

$$\blacksquare \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \blacksquare \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\blacksquare \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \blacksquare \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\blacksquare \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \blacksquare \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Proposition*.— formules de duplication —. En particulier, lorsque $a = b$, nous obtenons :

$$\blacksquare \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\blacksquare \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\blacksquare \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

■ ■ ■ Formules de linéarisation

Proposition*.— Produits en somme (linéarisation) —. pour tous réels a et b

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Corollaire*.— En particulier, lorsque $a = b$, nous avons

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos^2 a & = & \frac{1}{2}[1+\cos 2a] \\ \sin^2 a & = & \frac{1}{2}[1-\cos 2a] \end{array}}$$

Savoir-Faire : à l'aide des formules précédentes, ou bien en utilisant les formules du binôme, d'Euler et de Moivre, vous devez savoir :

- linéariser un produit de cos et de sin
- au contraire, transformer $\cos(p\theta)$ en un polynôme de cos et de sin

Exercice 1 : En procédant de deux manières différentes,

- exprimez $\cos^3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\cos 3\theta$.
- exprimez $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.

■ ■ ■ Formules de factorisation

Proposition*.— Factorisation par l'exponentielle imaginaire de l'angle moitié —. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacksquare \quad e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \\ \blacksquare \quad e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \end{array}}$$

On en déduit

Proposition*.— Transformations de sommes en produits —. Pour tous réels p et q

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos p + \cos q & = & 2\cos\frac{p-q}{2}\,\cos\frac{p+q}{2} \\ \sin p + \sin q & = & 2\cos\frac{p-q}{2}\,\sin\frac{p+q}{2} \\ \cos p - \cos q & = & -2\sin\frac{p-q}{2}\,\sin\frac{p+q}{2} \end{array}}$$

■ ■ ■ Résolution d'équations trigonométriques

Proposition*.— Equations simples

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos x = \cos a & \Longleftrightarrow & x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv -a[2\pi] \\ \sin x = \sin a & \Longleftrightarrow & x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - a[2\pi]. \\ \tan x = \tan a & \Longleftrightarrow & x \equiv a[\pi] \end{array}}$$

Proposition*.— Factorisation de $a\cos x + b\sin x = c$ —. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$. Il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Par conséquent,

$$\boxed{a\cos x + b\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Exercice 2 : Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique de l'équation $\cos x + \sin x = 1$.