PROGRAMME DE COLLE S19

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FRACTIONS RATIONNELLES

■■■ Corps des fractions rationnelles

Définition : *On appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans* $\mathbf{K}$ *et d'indéterminée* X *toute expression de la forme* $F = P/Q$*, où* $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ *et* Q *n'est pas le polynôme nul. Deux fractions rationnelles* $F_1 = P_1/Q_1$ *et* $F_2 = P_2/Q_2$ *sont égales si* $P_1 \times Q_2 = P_2 \times Q_1$.

Théorème*.— $\big(\mathbf{K}(X), +, \times\big)$ est un corps.

Proposition.— Représentant irréductible d'une fraction rationnelle —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$, il existe un couple $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, unique tel que

- Q est unitaire,
- P et Q sont premiers entre eux,
- $F = P/Q$.

La fraction P/Q est appelée, **représentant irréductible** de F.

Proposition*.— degré d'une fraction rationnelle —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$. Le nombre $d = d^\circ P - d^\circ Q \in \mathbf{Z} \cup -\infty$ est indépendant du couple $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $F = P/Q$. On note $d^\circ F = d^\circ P - d^\circ Q$.

Définition : *Soit* $F = P/Q$ *une fraction rationnelle présentée **sous forme irréductible**, et* $\alpha \in \mathbf{K}$.

- *Si* α *est une racine de* P *d'ordre de multiplicité* p*, on dit que* α *est un zéro de* F *de multiplicité* p*.*
- *Si* α *est une racine de* Q *d'ordre de multiplicité* p*, on dit que* α *est un pôle de* F *de multiplicité* p*.*

■■■ Décomposition en éléments simples

Théorème*.— Partie entière —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle. Il existe un couple $(E, G) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X)$ unique tel que E est un polynôme, G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif et $F = E + G$.
E est appelée la **partie entière** de F, G est la partie fractionnaire.

Proposition*.— Séparation des pôles —. Soit $F = \dfrac{P}{Q_1 \times Q_2}$ une fraction de degré strictement négatif telle que $Q_1 \wedge Q_2 = 1$. Alors, il existe un couple $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ de polynômes, unique tel que $d^\circ P_1 < d^\circ Q_1, d^\circ P_2 < d^\circ Q_2$ et

$$\boxed{\frac{P}{Q_1 \times Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}}$$

Théorème*.— Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}(X)$ —. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients complexes présentée sous forme irréductible.

$$\boxed{F = Ent(F) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i - 1} \frac{a_{i,k}}{(X - \alpha_i)^{p_i - k}}}$$

où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{p_i}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{C}[X]$.

Proposition.— Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non nul. Notons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ les zéros distincts de P, et $(r_1, \ldots, r_p)$ leurs ordres de multiplicités respectifs. Alors

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{(X - \alpha_i)}}$$

Théorème*.— Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}(X)$ —.Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{R}(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients réels présentée sous forme irréductible.

$$\boxed{F = Ent(F) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{j,k}X + c_{j,k}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}}$$

où $Q = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{R}[X]$.

■■■ Pratique de la décomposition en éléments simples

Proposition.— Pôle simple —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ un pôle simple de F, *ie* que $F = \dfrac{P}{(X-\alpha)\times\hat{Q}}$ où $\hat{Q}(\alpha) \neq 0$. La partie polaire relative à α s'écrit $F_\alpha = \dfrac{a_0}{(X-\alpha)}$, où a_0 est donné par :

$$\boxed{a_0 = \frac{P}{\hat{Q}}(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}}$$

Proposition.— Pôle double —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ un pôle double de F, *ie* que $F = \dfrac{P}{(X-\alpha)^2\times\hat{Q}}$ où $\hat{Q}(\alpha) \neq 0$. La partie polaire relative à α s'écrit $F_\alpha = \dfrac{a_0}{(X-\alpha)^2} + \dfrac{a_1}{(X-\alpha)}$, où a_0 et a_1 sont donnés par :

$$\boxed{a_0 = \frac{P}{\hat{Q}}(\alpha) \quad \text{et} \quad a_1 = \left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)'(\alpha)}$$

Proposition*.— Pôle multiple —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$. On suppose que $a \in \mathbf{K}$ est un pôle d'ordre $p \in \mathbf{N}^\star$ de F. Notons $\hat{Q}$ le polynôme tel que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^p \times \hat{Q}(X)}$ et $\hat{Q}(a) \neq 0$.
La partie polaire de F en a s'écrit

$$F_a(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{(X-a)^{p-k}} = \frac{\lambda_0}{(X-a)^p} + \frac{\lambda_1}{(X-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p-1}}{(X-a)}.$$

où les $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ sont donnés par :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad \lambda_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)^{(k)}(a)}$$

Savoir-faire : exploiter parité, coefficients réels, limites à l'infini, et autres évaluations pour calculer les autres coeffs.

■■■ Applications au calcul de primitives

Proposition*.— Primitives des fractions rationnelles

- $\forall a \in \mathbf{R}$ $\quad \displaystyle\int^x \frac{dt}{t-a} = \ln|x-a| + C$
- $\forall a \in \mathbf{R}$ $\quad \displaystyle\int^x (t-a)^n\,dt = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$ pour $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$
- $\forall a \in \mathbf{R}^{+\star}$ $\quad \displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C$