Chapitre 9

Relations de comparaison

Sommaire

OBJECTIFS

Le chapitre est technique. La notion essentielle est celle d'équivalent de fonction. À la fin du chapitre, vous devez :

- ▷ connaître parfaitement les équivalents usuels
- ▷ savoir déterminer un équivalent,
- ▷ savoir utiliser les équivalents pour calculer une limite

Introduction

Comme nous l'avons vu au **Chapitre 7**, les propriétés algébriques des fonctions possédant une limite ne suffisent pas toujours pour décider si la somme ou le quotient de deux fonctions possède une limite. Le **Théorème** 8.11 laisse en effet apparaître des *cas d'indétermination*, de manière tout à fait analogue à ce qui se passe pour l'étude des suites. Pour *lever* ces indéterminations, nous allons développer dans ce chapitre des techniques servant à analyser plus *finement*, les sommes, les produits ou les quotients indéterminés. Notre tactique sera articulée en deux étapes, que vous suivrez en pratique pour étudier une limite :

$\boxed{1}$ Tout d'abord nous allons démontrer qu'on peut se ramener à l'étude des fonctions usuelles, grâce au **calcul par équivalents**,

$\boxed{2}$ puis **comparer** les vitesses de convergence des fonctions usuelles.

I Relation de domination

1 Définition

Définition : *Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a, et on note $f = \mathcal{O}_a(g)$, ou $f(x) =_{x\to a} \mathcal{O}_a(g(x))$, s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ de a dans I et une fonction $\varphi \in \mathscr{F}(V, \mathbf{R})$ tels que*

- $(\forall x \in V), \quad f(x) = \varphi(x)g(x)$
- *φ est bornée dans V*

Exemple : f est bornée au voisinage de a *ssi* $f = \mathcal{O}_a(1)$.

Commentaires : autrement dit, la relation $f = \mathcal{O}(g)$ signifie qu'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ de a dans I et une constante (strictement) positive M tels que :

$$(\forall x \in V), \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

2 Caractérisation à l'aide du quotient

Sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas dans I, la fonction φ qui intervient dans la définition précédente est tout simplement le quotient $\dfrac{f}{g}$. Cette hypothèse est trop contraignante en pratique car nous sommes souvent en présence d'une fonction g qui ne s'annule pas dans un voisinage de a dans I, sauf peut-être au point a.

Vocabulaire : *si $V \in \mathcal{V}_I(a)$ est un voisinage de a dans I, alors $V \setminus \{a\}$ s'appelle un **voisinage épointé** de a.*

Si nous supposons que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de a, alors la fonction φ n'est autre que le quotient $\dfrac{f}{g}$ dans $V \setminus \{a\}$ et nous obtenons :

Théorème 9.1.— Caractérisation par les quotients —. Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, et que f et g sont continues au point a si $a \in I$.

$$\boxed{f(x) = \underset{a}{\mathcal{O}}\big(g(x)\big) \iff \frac{f}{g} \textit{ est bornée dans un voisinage épointé de } a}$$

En pratique : cette caractérisation par les quotients sert souvent de définition pour la relation de domination.

Démonstration $\triangledown$

Nous distinguons deux cas suivant que $g(a)$ est nul (ce qui suppose implicitement $a \in I$ ou pas.

- si $g(a) \neq 0$. Nous raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} f = \underset{a}{\mathcal{O}}(g) &\iff (\exists M \in \mathbf{R}^+)\ (\exists V \in \mathcal{V}_I(a));\ (\forall x \in V) \quad |f(x)| \leq M\,|g(x)| \\ &\iff (\exists M \in \mathbf{R}^+)\ (\exists V \in \mathcal{V}_I(a));\ (\forall x \in V) \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \\ &\iff (f/g) \text{ est bornée au voisinage de } a \end{aligned}$$

- si $g(a) = 0$. Procédons par double-implication :
  - si $f = \mathcal{O}_a(g)$, alors comme précédemment, f/g est bornée dans un voisinage de a dans $I \setminus \{a\}$.
  - si f/g est bornée dans un voisinage de a dans $I \setminus \{a\}$. En ce cas, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ de a et une constante $M \in \mathbf{R}^+$ tels que,
  $$\forall x \in V \setminus \{a\}, \quad |f(x)| \leq M\,|g(x)|$$
  Or, par hypothèse, g s'annule en a et est continue en a. Par conséquent $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Par comparaison, il s'ensuit que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Comme f est continue en a par hypothèse, ceci entraîne que $f(a) = 0$. La relation ci-dessus se prolonge par passage à la limite dans des inégalités au point a.

▲

Corollaire 9.2.— Sous les mêmes conditions que précédemment

$$f = \underset{a}{\mathcal{O}}(g) \iff \frac{f}{g} = \underset{a}{\mathcal{O}}(1) \iff (\exists V \in \mathcal{V}_I(a))\ \big(\exists M \in \mathbf{R}^+\big),\ (\forall x \in V \setminus \{a\}),\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M.$$

Exemple : La fonction sin est dominée au voisinage de 0 par la fonction $Id_{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire

$$\sin x = \underset{0}{\mathcal{O}}(x)$$

En effet, nous avons déjà démontré l'encadrement

$$\big(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big),\ |\sin x| \leq |x|$$

pour le calcul des limites des fonctions trigonométriques $\sin, \cos$ et $\tan$.

Exercice : Soit f définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par $f(x) = \dfrac{24\,x}{1 + x^2}$. Montrez que $f = \mathcal{O}_0(x)$.

Solution $\triangledown$

J'utilise la caractérisation par les quotients : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{24}{1 + x^2}$. *En particulier, pour tout nombre réel non nul* x, $\dfrac{f(x)}{x} \leq 24$. *Ce qui prouve que* $f(x) = \mathcal{O}_0(x)$. ▲

Comme une fonction possédant une limite finie en a est localement bornée au voisinage de a, on en déduit immédiatement :

Corollaire 9.3.— Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, et que f et g sont continues au point a si $a \in I$. Alors

$$\boxed{\textbf{Si } \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbf{R}, \textbf{ alors } f = \underset{a}{\mathcal{O}}(g).}$$

3 Propriété fondamentale

L'intérêt majeur de la relation de domination est de donner une traduction nouvelle pour le **théorème de convergence par comparaison** :

Proposition.— Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \quad f = \mathcal{O}_a(g) \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0}$$

Démonstration ▽
L'hypothèse $f = \mathcal{O}_a(g)$ se traduit par l'existence d'un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ de a et d'une constante $M \in \mathbf{R}^+$ tels que :$\forall x \in \mathcal{V},\ |f(x)| \leq M\,|g(x)|$. Comme de plus, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, il découle directement du **Corollaire** 8.13 que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
▲

4 Règles de calcul avec les $\mathcal{O}$

Proposition 9.4.— Soit $(f,g,h) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})^3$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.

- $f = \mathcal{O}_a(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a.
- $f = \mathcal{O}_a(g) \iff \frac{f}{g} = \mathcal{O}_a(1)$
- $f = \mathcal{O}_a(g) \Rightarrow \lambda f = \mathcal{O}_a(g)$,
- $f = \mathcal{O}_a(g) \Rightarrow f = \mathcal{O}_a(\lambda g)$,
- $f = \mathcal{O}_a(h)$ et $g = \mathcal{O}_a(h) \Rightarrow f + g = \mathcal{O}_a(h)$,
- $f = \mathcal{O}_a(g) \Rightarrow f \times h = o_a(gh)$
- $f = \mathcal{O}_a(g)$ et $g = \mathcal{O}_a(h) \Rightarrow f = \mathcal{O}_a(h)$.

II Relation de négligeabilité

1 Définition

Définition : *Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de a, et on note $f = o_a(g)$ s'il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_I(a)$ de a dans I et une fonction $\varphi \in \mathscr{F}(V,\mathbf{R})$ tels que*

- $(\forall x \in V), \quad f(x) = \varphi(x) g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

Remarque : Si $f = o_a(g)$, alors $f = \mathcal{O}_a(g)$.

Exemple : $f = o_a(1) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

2 Caractérisation à l'aide du quotient

Comme pour la relation de domination, nous utiliserons en pratique une caractérisation par les quotients :

Théorème 9.5.— Caractérisation par les quotients —. Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, et que f et g sont continues au point a si $a \in I$. Alors

$$\boxed{f = o_a(g) \iff \lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Commentaires : en clair, f est négligeable devant g au voisinage de a si $|f(x)|$ est infiniment plus petit que $g(x)$ pour x voisin de a.

Démonstration ▽

La démonstration suit les mêmes lignes que celle de la caractérisation de la relation de domination, je rédige plus rapidement :

- si $g(a) \neq 0$. Nous raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} f = o_a(g) &\iff (\exists V)\ (\exists\varphi);\ (\forall x \in V)\quad f = \varphi g \text{ et } \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0 \\ &\iff (f/g) \text{ est définie au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x\to a}(f/g)(x) = 0 \end{aligned}$$

- si $g(a) = 0$. Procédons par double-implication :
  - si $f = o_a(g)$, alors comme précédemment, f/g est définie dans un voisinage V de a dans $I \setminus \{a\}$ et
  $$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) \xrightarrow[x\to a^{\pm}]{} 0$$
  - si $\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors en particulier (f/g) est bornée dans un voisinage de a dans $I \setminus \{a\}$. Par conséquent, $f = \mathcal{O}_a(g)$. Comme $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Il en résulte par comparaison, que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *i.e.* $f(a) = 0$. Définissons alors la fonction φ dans V par
  $$\varphi(a) = 0 \text{ et } \forall x \in V \setminus \{a\},\ \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
  Ainsi, $\varphi(a) = 0$ et $\lim_{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a} \varphi(x) = 0$, ce qui revient à dire que $\lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$. ▲

3 Règles de calcul avec les o

Proposition 9.6.— Soit $(f,g,h) \in \mathscr{F}(I,\mathbf{R})^3$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.

- $f = o_a(1) \iff \lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- $f = o_a(g) \iff \frac{f}{g} = o_a(1)$.
- $f = o_a(g) \Rightarrow \lambda f = o_a(g)$,
- $f = o_a(g) \Rightarrow f = o_a(\lambda g)$,
- $f = o_a(h)$ et $g = o_a(h) \Rightarrow f + g = o_a(h)$,
- $f = o_a(g) \Rightarrow f \times h = o_a(gh)$
- $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h)$.

Démonstration ▽

Ces propriétés découlent aisément de celles des fonctions de limite nulle. ▲

Notation : *ces propriétés seront notées*

- *pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}^\star$, $\lambda o_a(g) = o_a(g)$,
- *pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}^\star$, $o_a(\lambda g) = o_a(\lambda g)$

- $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$
- $\psi\, o_a(g) = o_a(\psi g)$

Commentaires : $o_a(g)$ n'est pas à proprement parler une fonction, $o_a(g)$ désigne plus rigoureusement la classe des fonctions négligeables devant g.

4 Comparaison des fonctions usuelles

Le théorème suivant résume les relations de négligeabilité entre les fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Vous remarquerez que chacune de ces relations de négligeabilité se traduit à l'aide de la caractérisation via les quotients par la limite d'une forme indéterminée. Précisément, en pratique, ces *croissances comparées* des fonctions usuelles permettent de résoudre la plupart des indéterminations.

Théorème 9.7.— Comparaison des fonctions usuelles —. Soit $\gamma > 0$, $0 < \alpha < \beta$ et $1 < a < b$ des nombres réels. Alors

Au voisinage de $+\infty$	**Au voisinage de 0^+**
$(\ln x)^\gamma = o_{+\infty}(x^\alpha)$	$(\|\ln x\|)^\gamma = o_0(1/x^\alpha)$
$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$	$x^\beta = o_0(x^\alpha)$
$x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$	
$a^x = o_{+\infty}(b^x)$	

La démonstration de ce théorème résulte à l'aide de la caractérisation via les quotients des prochains paragraphes.

4.a Comparaison des logarithmes et des puissances

Proposition 9.8.— Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$. Alors

- **au voisinage de** $+\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+$
- **au voisinage de** 0^+ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0^+$

Commentaires : lorsqu'il y a indétermination,
Retenez que la puissance l'emporte sur le logarithme.

Démonstration $\triangledown$

1. Au voisinage de $+\infty$.

a. Supposons tout d'abord que $\alpha = 1$ et montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$. Pour cela on utilise une petite astuce : la majoration $\ln x < x$ est valide pour tout nombre réel positif (strictement) x. En particulier, nous[1] pouvons appliquer cette inégalité au nombre réel positif x^r, où r est un nombre réel positif. Il vient :

$$(\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}),\ \ln x < (1/r)\ x^r$$

A présent, donnons-nous $\beta > 0$ et choisissons $r \in]0, \beta[$. D'après ce qui précède, et la **Proposition** 8.24 nous avons $\displaystyle\frac{\ln x}{x^\beta} \leq (1/r)\ \frac{x^r}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On conclut alors par **comparaison**.

b. Soit $\alpha > 0$ quelconque. Alors $\displaystyle\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$.

Posons $y(x) = \displaystyle\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}}$. D'après l'étude du cas $\alpha = 1$, il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$. D'autre part, d'après la **Proposition** 8.24, $\displaystyle\lim_{y\to 0} y^\alpha = 0$. Par composition des limites, nous obtenons finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$.

1. *user = utilisateur malin*

2. Au voisinage de 0^+. La tactique de base est de se ramener en $+\infty$, en introduisant la fonction $y(x) = \frac{1}{x}$. Nous pouvons alors écrire :

$$x^\beta (\ln x)^\alpha = \frac{(-\ln y(x))^\alpha}{y^\beta}.$$

Or, il est clair que $\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty$. Or, nous savons d'après la comparaison des logarithmes et des puissances au voisinage de $+\infty$ que $\lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^\alpha}{y^\beta} = 0$. Par composition des limites, j'en déduis que $\lim_{x\to 0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0$.

▲

4.b Comparaison des fonctions puissances

Proposition 9.9.— Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{+\star} \times \mathbf{R}^{+\star}$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Alors

- **au voisinage de** $+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0^+$
- **au voisinage de** 0^+ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0^+$

Démonstration ▽
Les résultats de cette proposition découlent directement du **Théorème** 8.24. ▲

4.c Comparaison des puissances et des exponentielles

Afin de compléter le «tableau»de comparaison des fonctions usuelles, il nous reste à comparer les puissances avec les exponentielles. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 9.10.— Soit $a > 1$ et $\alpha > 0$, alors :

- **au voisinage de** $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0^+$
- **au voisinage de** $-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0^+$

Commentaires : lorsqu'il y a indétermination,
Retenez que l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

Démonstration ▽

1. Au voisinage de $+\infty$: posons $y(x) = e^x$, il vient $\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{(\ln y)^\alpha}{y^{\ln a}}$. D'après l'étude des limites des fonctions exponentielles, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$. D'autre part, comme $a > 1$, $\ln a > 0$. On déduit alors de la **Proposition** 9.8 que $\lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y)^\alpha}{y^{\ln a}} = 0$. Par composition des limites, il en résulte que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

2. Au voisinage de $-\infty$: posons $y = -x$, il vient $|x|^\alpha a^x = \frac{y^\alpha}{a^y}$. Or $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{a^y} = 0$ d'après le cas précédent. Par composition des limites, il en résulte finalement que $\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$. ▲

Exercice : Calculez la limite en 0^+ de $f(x) = \dfrac{x^5 e^{1/\sqrt{x}}}{\ln x}$.

Solution ▽

Remarquez que le dénominateur $\ln x$ a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, et le numérateur est une forme indéterminée $0 \times (+\infty)$. Afin d'étudier cette limite, commençons par faire un changement de variable :

Posons $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et introduisons la fonction $g(y) = \left(\frac{1}{y^2}\right)^5 \frac{e^y}{\ln \frac{1}{y^2}} = -\frac{e^y}{2y^{10}\ln y}$, de sorte que $f(x) = g \circ y(x)$

Il est clair que $\lim_{x\to 0+} y(x) = +\infty$. Calculons la limite en $+\infty$ de $g(y)$. Pour tout $y > 0$, nous avons

$$g(y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\ln y}\right) \times \left(\frac{e^y}{y^{11}}\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty,$$

d'après le **Théorème** *ci-dessus.*
On conclut alors grâce au **Théorème** *8.12, que* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. ▲

Le **Théorème** 9.7 est d'un usage constant pour lever les indéterminations dans le calcul de limites mettant en jeu les fonctions usuelles. Dans la prochaine section, nous allons introduire une notion permettant de ramener l'étude *locale*[2] d'une fonction à celle des fonctions usuelles.

III Relation d'équivalence

La notion d'équivalence est très importante pour le calcul des limites. *Intuitivement*, deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point a lorsqu'elles ont le même comportement quand x tend vers a. Dans la pratique, vous chercherez à remplacer la fonction à étudier par un équivalent le plus simple possible.

1 Définition

Définition : *Soit* $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. *On dit que* f *est* ***équivalente à*** g *au voisinage de* a, *et on note* $f \sim_a g$ *s'il existe un voisinage* $V \in \mathcal{V}_I(a)$ *de* a *et une fonction* $\varphi \in \mathscr{F}(V, \mathbf{R})$ *tels que*

- $(\forall x \in V), \quad f(x) = \varphi(x)g(x)$
- $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$

Exemples :

- $f \sim_a 1 \iff \lim_{x\to a} f(x) = 1$
- $f \sim_a 0 \iff f = 0$ au voisinage de a

Remarque : La relation d'équivalence est une relation d'équivalence !

2 Caractérisations de la relation d'équivalence

2.a Caractérisation à l'aide du quotient

Comme précédemment, on préfère en pratique utiliser une caractérisation à l'aide des quotients :

Théorème 9.11.— Caractérisation par les quotients —. Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, et que f et g sont continues au point a si $a \in I$. Alors

$$\boxed{f \sim_a g \iff \lim_{x \xrightarrow{\neq} a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Démonstration ▽
La démonstration suit les mêmes lignes que celle de la caractérisation de la relation de négligeabilité.

- si $g(a) \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \sim_a (g) \quad &\iff \quad (\exists V)\ (\exists \varphi);\ (\forall x \in V) \quad f = \varphi g \text{ et } \lim_{x\to a} \varphi(x) = 1 \\ &\iff \quad (f/g) \text{ est définie au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x\to a} (f/g)(x) = 1 \end{aligned}$$

- si $g(a) = 0$.
  - si $f \sim_a (g)$, alors f/g est définie dans un voisinage V de a dans $I \setminus \{a\}$ et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) \xrightarrow[x\to a^\pm]{} 1$$

2. c'est-à-dire au voisinage d'un point a

- si $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors en particulier (f/g) est bornée dans un voisinage de a dans $I \setminus \{a\}$. Comme $g(a) = 0$, il en résulte par comparaison, que $f(a) = 0$. Définissons alors la fonction φ dans V par

$$\varphi(a) = 1 \text{ et } \forall x \in V \setminus \{a\},\ \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ainsi, $\varphi(a) = 1$ et $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} \varphi(x) = 1$, ce qui revient à dire que $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1$. ▲

Exercice : Soit f et g les fonctions réelles définies dans un voisinage de 0 par $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x$. Démontrez que $f \sim_0 g$.

Exercice : Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\ell \in \mathbf{R}^\star$.

1. Que signifie la relation $f \sim_a 0$?
2. Que signifie la relation $f \sim_a \ell$?

Warning : si, à la fin d'un calcul par équivalent, vous obtenez $f \sim_a 0$, **vous vous êtes trompé !** car **seules** les fonctions constantes égales à 0 au voisinage de a sont équivalentes à 0 ! !

Corollaire 9.12.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

$$\boxed{(\forall \ell \in \mathbf{R}^\star) \quad \left(f \sim_a \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell\right)}$$

En pratique : les deux sens de ce corollaire sont intéressants :

- Si vous savez que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}^\star$, dans ce cas, vous pouvez conclure que $f(x) \sim_a \ell$.
- Si vous avez démontré que $f \sim_a \ell$, alors vous pouvez en conclure que f admet ℓ comme limite au point a.

Remarque : Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. La relation définie par :

$$\forall (f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I, \mathbf{R}),\ f \sim_a g$$

est une relation d'équivalence[3], c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g, h : I \to \mathbf{R}$:

— $f \sim_a f$

— $f \sim_a g$ et $g \sim_a h \Rightarrow f \sim_a h$.

— $f \sim_a g \iff g \sim_a f$

En pratique : vous pouvez enchaîner les équivalents comme s'il s'agissait d'égalités.

2.b Caractérisation à l'aide de la différence

Théorème 9.13.— Caractérisation à l'aide de la différence —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, alors

$$\boxed{f \sim_a g \quad \iff \quad f - g = o_a(g).}$$

Commentaires : $f \sim_a g$ si la différence entre ces deux fonctions est négligeable.

Démonstration ▽

a étant fixé, j'oublie de préciser que les équivalents ou les ≪o≫sont relatifs à a.

La condition est nécessaire : supposons que $f \sim g$. Par définition il existe une fonction φ définie au voisinage de a de limite 1 au point a et telle que $\forall x \in V,\ f(x) = \varphi(x) g(x)$. Notons $\varepsilon(x) = 1 - \varphi(x)$. Il est clair que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. De plus, au voisinage de a, nous avons $f(x) = g(x)\big(1 + \varepsilon(x)\big)$, ce qui peut aussi s'écrire :

$$f(x) - g(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

3. *i.e.* réflexive, transitive et **symétrique**

Par définition, il est clair que $\varepsilon \times g = o(g)$. Par conséquent, nous avons démontré que $f - g = o(g)$.
La condition est suffisante : supposons que $f - g = o(g)$. Cela signifie par définition de o qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle $\forall x \in V,\ f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Posons $\varphi = 1 + \varepsilon$. Par les propriétés algébriques des fonctions possédant une limite, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$. De plus, pour tout x dans V, nous avons l'égalité :

$$f(x) = \varphi(x)g(x),$$

ce qui prouve que $f \sim g$. ▲

Nous pouvons reformuler le **Théorème** 9.13, de manière plus pratique :

Corollaire 9.14.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\boxed{f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)}$$

3 Propriétés des fonctions équivalentes

3.a Signe de fonctions équivalentes

Proposition 9.15.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}) \times \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.
On suppose que $f \sim_a g$. Alors

$$\boxed{f > 0 \text{ au voisinage de } a \textit{ si et seulement si } g > 0 \text{ au voisinage de } a}$$

Commentaires : la démonstration montre plus généralement que deux fonctions équivalentes au voisinage de a prennent en chaque point x voisin de a le même signe.

En pratique : pour étudier le signe d'une fonction, vous pouvez étudier le signe d'une fonction équivalente.

Démonstration ▽
Par définition, $f \sim_a g$ assure l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}$ de a et d'une fonction φ définie dans $\mathcal{V}$ telle que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) = \varphi(x)g(x)$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$. Par les propriétés de compatibilté "limite et inégalité", il s'ensuit que φ est strictement positive au voisinage de a. Ainsi, il résulte de l'égalité fonctionnele

$$f = \varphi g \text{ au voisinage de } a$$

que f et g sont nécessairement de même signe. En particulier, f est strictement positive *si et seulement si* g l'est . ▲

3.b Compatibilité de l'équivalence et des autres relations de comparaison

Proposition 9.16.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.
On suppose que $f \sim_a g$. Alors

- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad h = \mathcal{O}_a(f) \iff h = \mathcal{O}_a(g)$,
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad f = \mathcal{O}_a(h) \iff g = \mathcal{O}_a(h)$,
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad h = o_a(f) \iff h = o_a(g)$,
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad f = o_a(h) \iff g = o_a(h)$.
- $\forall h \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R}), \quad f \sim_a h \iff g \sim_a h$.

Commentaires : en clair, vous pouvez remplacer f par g dans n'importe quelle autre relation de comparaison.

Démonstration ▽
Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de a, suffisamment petit pour que toutes les fonctions ci-dessous soient bien définies : Dans $\mathcal{V}$, $f = \varphi g$, où $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1$.

- Écrivons $h = \psi f$, où ψ est une fonction bornée dans $\mathcal{V}$ (resp. de limite nulle en a). Il s'ensuit que $h = \psi\varphi g$, où la fonction $\psi\varphi$ est bornée dans $\mathcal{V}$ (resp. a pour limite 0 au point a). Par définition, c'est dire que $h = \mathcal{O}_a(g)$ (resp. $h = o_a(g)$).
- Écrivons $f = \psi h$, où ψ est une fonction bornée dans $\mathcal{V}$ (resp. de limite nulle en a). Il en résulte que $g = (\psi/\varphi)h$, où la fonction ψ/φ est bornée dans $\mathcal{V}$ (resp. a pour limite 0 au point a). Par définition, c'est dire que $g = \mathcal{O}_a(h)$ (resp. $g = o_a(h)$). ▲

3.c Propriété fondamentale des fonctions équivalentes

L'intérêt majeur des équivalents est de préserver les limites comme le montre le **Théorème** suivant :

Théorème 9.17.— Calcul de limite par équivalent
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que $f \sim_a g$. Alors

$$\boxed{(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a} g(x) = \ell\right).}$$

Commentaires : ce théorème vous permet dans une étude de limite au point a de remplacer f par une fonction qui lui est équivalente au voisinage de a.

En pratique : on raisonne par équivalences successives : pour étudier $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \sim_a & f_1(x) \\ & \sim_a & f_2(x) \\ & \vdots & \vdots \\ & \sim_a & f_p(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{array}$$

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Démonstration ▽

Soit φ une fonction définie dans un voisinage V de a telle que $\begin{cases} \forall x \in V,\ f(x) = \varphi(x).g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1 \end{cases}$. A présent donnons-nous un $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

- Supposons que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$. Alors, par les propriétés algébriques des fonctions possédant une limite, la fonction produit $\varphi \times g$ possède une limite en a et par conséquent :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) \lim_{x\to a} g(x) = 1 \times \ell = \ell.$$
- Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. La relation d'équivalence étant symétrique, il existe $\psi \in \mathscr{F}(V, \mathbf{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \psi = 1$ et $g = \psi f$ dans V. On en déduit comme ci-dessus que
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) \lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

▲

IV Obtention d'équivalents

1 Opérations algébriques

1.a Produit, quotient

Le calcul des limites grâce aux équivalents est grandement facilité par la compatibilité des équivalents avec les opérations suivantes :

Théorème 9.18.— Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. **On suppose** que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors

- **Produit** $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$.
- **Quotient** si de plus g_1 ne s'annule pas dans $I \setminus \{a\}$, $\dfrac{f_1}{g_1} \sim_a \dfrac{f_2}{g_2}$

En pratique : Pour obtenir un équivalent d'un produit (quotient)

$\boxed{1}$ on cherche un équivalent de chaque facteur

$\boxed{2}$ un équivalent du produit est le produit des équivalents

Démonstration ▽

Je considère *once and for all* φ et ψ des fonctions, définies au voisinage V de a de limite 1 au point a et telles que $f_1 = \varphi f_2$ et $g_1 = \psi g_2$.

- Au voisinage de a, nous avons $f_1 g_1 = \varphi\psi f_2 g_2$. La fonction $\varphi \times \psi$, définie au voisinage de a, vérifie $\lim\limits_{x \to a} \varphi \times \psi\,(x) = 1$ d'après les propriétés algébriques des fonctions qui possèdent des limites.
- Au voisinage de a, $\frac{f_1}{g_1} = \frac{\varphi}{\psi}\frac{f_2}{g_2}$, et la fonction $\frac{\varphi}{\psi}$ vérifie $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi}{\psi}(x) = 1$.

1.b Puissance

Théorème 9.19.— Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. **On suppose** que $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$. Alors

- **Puissance** si de plus f_1 est positive dans $I \setminus \{a\}$, $f_1^\alpha \sim_a f_2^\alpha$.

Démonstration ▽

Considérons comme précédemment φ et ψ des fonctions, définies au voisinage V de a de limite 1 au point a et telles que $f_1 = \varphi f_2$ et $g_1 = \psi g_2$.

- Au voisinage de a, nous avons $f_1^\alpha = \varphi^\alpha f_2^\alpha$, et d'après la **Proposition** 8.24, $\lim\limits_{x \to a} \varphi^\alpha(x) = 1$.

Remarque : l'hypothèse de positivité des fonctions f_1 et f_2 ne sert qu'à assurer que les fonctions f_1^α et f_2^α sont bien définies. Cette hypothèse est donc tout à fait inutile lorsque $\alpha \in \mathbf{N}$ est un entier naturel.

1.c Équivalent d'une somme

Les équivalents ne sont pas compatibles avec l'addition ! On n'obtient pas un équivalent d'une somme en ajoutant des équivalents de chaque terme. Par exemple :

Au voisinage de $+\infty$ $\quad f(x) = x^2 - x \sim x^2$

$g(x) = \ln(x) - x^2 \sim -x^2$

Mais $f(x) + g(x) = \ln(x) - x \not\sim 0$

Ainsi, **la fonction-somme n'est pas équivalente à la somme des équivalents** en général. Pour une fois, les choses ne se passent pas aussi bien que l'on pourrait l'espérer, et c'est une importante source d'erreurs.

Concrètement, pour déterminer l'équivalent d'une somme de fonctions, nous utilisons la **caractérisation avec la différence** :

Corollaire 9.20.— Équivalent d'une somme de fonctions —. Soit $(f, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})^2$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- **Somme** si $h = o_a(f)$, alors $f + h \sim_a f$

En pratique : pour déterminer l'équivalent d'une somme,

$\boxed{1}$ classez ses termes par ordre de négligeabilité

$\boxed{2}$ laissez tombez tous les termes négligeables !

Exemple :

$$\begin{array}{rcl}\big(\ln(x)\big)^2 - x^2 + e^x & \sim_{+\infty} & e^x \\ \big(\ln(x)\big)^2 - x^2 + e^x & \sim_0 & \big(\ln(x)\big)^2\end{array}$$

Remarque : on comprend mieux pourquoi on n'obtient pas un équivalent de la somme en ajoutant des équivalents :

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & g_1 + \eta_1,\ \text{avec } \eta_1 = o(g_1) \\ f_2 & = & g_2 + \eta_2,\ \text{avec } \eta_2 = o(g_2) \\ f_1 + f_1 & = & (g_1 + g_2) + (\eta_1) + \eta_2) \end{array}$$

Il se peut qu'à cause de compensations, $g_1 + g_2 = 0$ ou que $g_1 + g_2 = o(\eta_1 + \eta_2)$.

De telles compensations ne peuvent advenir lorsque les termes sont de signe constant au voisinage de a :

Proposition 9.21.— Équivalent d'une somme de fonctions positives
Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. **On suppose que f_1 et g_1 sont strictement positives** au voisinage de a. Alors :

Si $f_1 \sim_a f_2$ et $g_1 \sim_a g_2$, **alors** $f_1 + g_1 \sim_a f_2 + g_2$.

Remarques :

1. Il n'est pas nécessaire de supposer que f_2 soit positive car étant équivalente à une fonction strictement positive, f_2 est automatiquement strictement positive dès que f_1 l'est.
2. Bien sûr, cette proposition reste valable si on suppose que les fonctions f_1 et g_1 sont strictement négatives au voisinage de a.

Démonstration ▽
Utilisons le **Théorème** 9.13 : il existe par hypothèse des fonctions $\varphi = o(f_1)$ et $\psi = o(g_1)$ telles que $f_2 = f_1 + \varphi$ et $g_2 = g_1 + \psi$. Par conséquent $f_2 + g_2 = f_1 + f_2 + \varphi + \psi$. Il suffit de démontrer que $\varphi + \psi = o(f_1 + f_2)$.
Montrons que $\varphi = o(f_1 + f_2)$. Comme par hypothèse, $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$, il suffit pour cela de montrer que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi}{f_1 + f_2} = 0$.
Comme par construction $\varphi = o(f_1)$, nous obtenons par comparaison :

$$0 \leq \frac{|\varphi|}{f_1(x) + f_2(x)} < \frac{|\varphi|}{f_1(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

On montre de la même manière que $\psi = o(f_1 + f_2)$. On en déduit[4] $\varphi + \psi = o(f_1 + f_2)$. ▲

2 Changement de variable

Théorème 9.22.— Soit $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$, $h \in \mathscr{F}(J, \mathbf{R})$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \in \bar{J}$, tels que $h(J) \subset I$.

$$\textbf{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{y\to b} h(y) = a \\ \bullet\ f \sim_a g \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad f \circ h \sim_b g \circ h$$

Ce que vous pouvez faire : composer par la droite.
Ce que vous ne pouvez pas faire : les équivalents ne sont **pas compatibles** avec la *composition à gauche* :

• Au voisinage de $+\infty$, $x^2 + x \sim x^2$, mais $e^{x^2+x} \not\sim e^{x^2}$.
Retenez :

$$f \sim g \not\Rightarrow e^f \sim e^g$$

• Au voisinage de 0, $1 + x \sim 1$, mais $\ln(1 + x) \not\sim 0$.
Retenez :

$$f \sim g \not\Rightarrow \ln f \sim \ln g$$

4. Il n'y a aucun souci pour additionner des o

Démonstration $\triangledown$
Par hypothèse, il existe un voisinage V de a dans I et une fonction $\varphi : V \to \mathbf{R}$ telle que

- $\forall x \in V,\ f(x) = \varphi(x)g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1$

D'autre part, comme $\lim\limits_{y \to b} h(y) = a$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans J tel que

$$\forall y \in \mathcal{W}, \quad h(y) \in V$$

Par conséquent,

$$\forall y \in \mathcal{W}, \quad f \circ h(y) = \varphi \circ h(y)\, g \circ h(y)$$

Posons $\psi = \varphi \circ h$. L'égalité précédente se traduit par $f \circ h = \psi\, g \circ h$ au voisinage de b. De plus, par composition des limites :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{y \to b} h(y) = a \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{y \to b} \psi(y) = 1$$

Par définition, ceci revient précisément à dire que $f \circ h \sim_b g \circ h$. ▲

3 À l'aide de la dérivée

Proposition 9.23.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$. Alors

$$\boxed{f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a)}$$

Démonstration $\triangledown$
On utilise la caractérisation par les quotients. L'hypothèse de dérivabilité de f en a garantit l'existence de la limite :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Comme de plus, $f'(a)$ est non nul, cette limite se traduit par $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \sim_a f'(a)$, soit encore, par compatibilité avec la multiplication :

$$f(x) - f(a) \sim_a f'(a) \cdot (x - a)$$

▲

Exemple : la fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$. Par conséquent

$$e^x - 1 \sim_0 x$$

4 Équivalents usuels

Nous allons terminer ce chapitre en donnant quelques équivalents classiques, **à connaître absolument**.

Théorème 9.24.— Equivalents usuels
Au voisinage de 0, nous disposons des équivalents suivants :

• $\sin x \sim x$	• $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	• $\tan x \sim x$
• $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	• $\ln(1 + x) \sim x$	• $e^x - 1 \sim x$

En pratique : L'équivalent $(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ est valide pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^\star$, mais on l'utilise particulièrement souvent pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$. En ce cas : $\sqrt{1 + x} - 1 \sim_0 \dfrac{x}{2}$

Démonstration $\triangledown$
La démonstration de ces équivalents repose en grande partie sur les liens avec la dérivabilité.

- Montrons $\sin x \sim x$
  La fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$. D'après la **Proposition** 9.23 il s'ensuit que $\sin x \sim_0 x$.
- Montrons que $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
  Exprimons $1 - \cos x$ en fonction de $\sin \frac{x}{2}$. Il vient

  $$1 - \cos x = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

  D'après les propriétés de compatibilité des équivalents avec la puissance et la composition, il s'ensuit finalement $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.
- Montrons que $\tan x \sim x$
  Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, nous avons $\cos x \sim 1$. Utilisant le 1. et la compatibilité des équivalents avec le quotient, nous obtenons $\tan x \sim x$.
- Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$. Montrons que $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$:
  Introduisons la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = (1+x)^\alpha$. f est dérivable en 0 comme composée de telles fonctions et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. En particulier, $f'(0) = \alpha \in \mathbf{R}^\star$ est non nul. La **Proposition** 9.23, s'applique : il en résulte que $f(x) - f(0) \sim \alpha(x-0)$, c'est-à-dire

  $$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$$

  Nb : dans le cas où α est nul, les deux membres de l'équivalence proposée sont nuls : $0 \sim_0 0$: il n'y a donc rien à prouver !
- Montrons que $\ln(1+x) \sim_0 x$:
  Introduisons la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = \ln(1+x)$. f est dérivable en 0 comme composée de telles fonctions et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. En particulier, $f'(0) = 1$. On conclut comme précédemment en invoquant la **Proposition** 9.23.
- Montrons que $e^x - 1 \sim_0 x$:
  La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $exp'(0) = 1$. On conclut à l'aide de la **Proposition** 9.23. ▲

À l'aide de la deuxième caractérisation des équivalents, nous pouvons reformuler les conclusions du théorème précédent de la façon suivante :

Corollaire 9.25.— Développements limités usuels
Au voisinage de 0,

•	$\sin x$	$=$	x	$+o(x)$
•	$\cos x$	$=$	$1 - \dfrac{x^2}{2}$	$+o(x^2)$
•	$\tan x$	$=$	x	$+o(x)$
•	e^x	$=$	$1 + x$	$+o(x)$
•	$(1+x)^\alpha$	$=$	$1 + \alpha x$	$+o(x)$.

Commentaires : Sous cette forme, les équivalents ci-dessus sont appelés des *développements limités* de la fonction au voisinage de 0. On généralisera cette méthode pour obtenir des équivalents dans le **Chapitre 24** .

Le théorème précédent permet de se ramener à des équivalents qui sont des fonctions polynomiales. On peut [5] alors utiliser la :

Proposition 9.26.— Equivalent d'une fonction polynomiale
Soit P la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbf{R}),\ P(x) = a_d\, x^d + a_{d+1}\, x^{d+1} + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n, \quad \text{où } a_d \neq 0,\ a_n \neq 0$$

- **Au voisinage de** $\pm\infty$ $\quad P(x) \sim a_n\, x^n$ (monôme dominant)
- **Au voisinage de** 0 $\quad P(x) \sim a_d\, x^d$ (monôme de plus bas degré)

5. *Strongly recommended*

Démonstration ▽
Au voisinage de $\pm\infty$ D'après le **Théorème** 9.7 , les puissances x^k pour $0 \le k \le n-1$ sont toutes négligeables devant $a_n x^n$. D'après le **Théorème** 9.13, il en résulte que la somme est équivalente à $a_n x^n$.
Au voisinage de 0 D'après le **Théorème** 9.7 , les puissances x^k pour $d+1 \le k \le n$ sont toutes négligeables devant $a_d x^d$. D'après le **Théorème** 9.13, il en résulte que la somme est équivalente à $a_d x^d$. ▲

4.a Mise en œuvre

Exercice : Déterminez un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

1. $x \to \ln\cos x$ en 0

2. $x \to e^{-x} + \sin x$ en 0

3. $x \to \dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x}$

4. $x \to x\big(e^{1/x} - \cos(1/x)\big)$ en $+\infty$

Solution ▽

1. Posons $y(x) = \cos x - 1$ de sorte que $\ln\cos x = \ln(1+y(x))$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ et $\ln(1+y) \sim_0 y$, j'en déduis par composition que

$$\ln\cos x \sim_0 \sim y(x).$$

Comme de plus, $y(x) \sim_0 -x^2/2$, il en résulte que

$$\ln\cos x \sim_0 -x^2/2.$$

2. Par opérations algébriques, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} + \sin x = 1 \in \mathbf{R}^\star$. En particulier,

$$e^{-x} + \sin x \sim_0 1.$$

3. Posons $y(x) = \tan^2 x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$ et $\sqrt{1+y} - 1 \sim_0 y/2$, il s'ensuit par composition que

$$\sqrt{1+y(x)} - 1 \sim (1/2)y(x) = (1/2)\tan^2 x.$$

Par compatibilité avec le quotient, il en découle finalement que

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x} \sim_0 \frac{\tan x}{2} \sim_0 \frac{x}{2}.$$

4. Posons $y(x) = 1/x$ de sorte que $x\big(e^{1/x} - \cos(1/x)\big) = \dfrac{e^{y(x)} - \cos(y(x))}{y(x)}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0^+$ et, au voisinage de 0, $e^y - 1 \sim y$ et $1 - \cos y \sim y^2/2$. Comme ces deux fonctions sont positives au voisinage de 0^+, nous pouvons additionner les équivalents, il en résulte que

$$e^y - \cos y \sim_0 y - y^2/2.$$

Au voisinage de 0, ce polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré : y. Ainsi, au voisinage de 0, nous avons

$$\frac{e^y - \cos y}{y} \sim 1.$$

Par composition, il en résulte que $x\big(e^{1/x} - \cos(1/x)\big) \sim_{+\infty} 1$. ▲