TECHNIQUES & MÉTHODES S30

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

ENSEMBLES FINIS, DÉNOMBREMENTS

■ ■ ■ Dénombrement

Il existe **deux principes**, très simples et très efficaces **en dénombrement** :

La discussion exclusive de cas

Pour dénombrer un ensemble, je peux distinguer plusieurs cas qui s'excluent l'un l'autre. Ceci revient à écrire E comme une réunion **disjointe**

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$$

Dans ce cas, vous pouvez conclure en invoquant l'additivité du cardinal que

$$\mathsf{Card}\ E = \mathsf{Card}\ (E_1) + \mathsf{Card}\ (E_2) + \cdots + \mathsf{Card}\ (E_p)$$

En pratique, je rédige ceci comme une discussion exclusive de cas :

- **Cas 1** soit (exclusif) $x \in E_1$ $\rightsquigarrow$ $\mathsf{Card}\ (E_1)$ *possibilités*
- **Cas 2** soit (exclusif) $x \in E_2$ $\rightsquigarrow$ $\mathsf{Card}\ (E_2)$ *possibilités*

  ⋮
- **Cas p** soit (exclusif) $x \in E_p$ $\rightsquigarrow$ $\mathsf{Card}\ (E_p)$ *possibilités*

Au total, $\mathsf{Card}\ (E) = \mathsf{Card}\ (E_1) + \mathsf{Card}\ (E_2) + \cdots + \mathsf{Card}\ (E_p)$.

Le principe du berger

Pour dénombrer un ensemble, je peux aussi décrire les étapes qui mènent à la construction d'un élément de E :

- **Étape 1** je choisis la valeur du premier critère $\rightsquigarrow$ n_1 *possibilités*
- **Étape 2** je choisis la valeur du deuxième critère $\rightsquigarrow$ n_2 *possibilités*

  ⋮
- **Étape p** je choisis la valeur du $p^{\text{ième}}$ critère $\rightsquigarrow$ n_p *possibilités*

Si le nombre de possibilités à chaque étape est **indépendant** du **résultat** de l'étape précédente, **les nombres de possibilités à chaque étape se multiplient.**

Au total, il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ façons de construire un élément de E. Donc

$$\mathsf{Card}\ E = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

■ ■ ■ Analyse combinatoire

Pour aborder un exercice d'analyse combinatoire, je pense à

1. **tenter de reconnaître un des modèles canoniques**. Je me pose les questions simples suivantes :
   — *le tirage est-il ordonné ?*
   — *peut-il y avoir répétitions ?*

   À partir de ces deux questions, je détermine vdans quelle situation je me trouve vis-a-vis des modèles canoniques en me reportant au tableau suivant :

choix de p objets parmi n	ordonné	non ordonné
avec répétition	n^p	? ?
sans répétition	A_n^p	$\binom{n}{p}$

   Remarque : Il est parfois utile de penser en termes d'applications, ou de suites ou bien encore de listes ... J'adopte le point de vue pertinent !.

   Lorsqu'aucun ne convient, il faut alors passer à l'étape suivante :

2. **utiliser les formules du dénombrement**
   — complémentaire (pour les "au moins un roi"...)
   — réunion disjointe (pour les discussions exclusives de cas " soit il y a 3 rois soit il y a 4 rois")
   Je fais une discussion exclusive de cas et à la fin :

$$\mathsf{Card}\ \{\text{tout}\} = \sum_{\text{différents cas}} \mathsf{Card}\ \{\text{cas possibles}\}$$

   — produit cartésien

   Si rien de tout cela, ne semble fonctionner, j'utilise le **principe des bergers**

▪▪▪ Coefficients du binôme

Trois méthodes de démonstration pour les formules avec les coefficients du binôme

Il y a trois stratégies pour démontrer une formule mettant en jeu des coefficients binomiaux :

— la preuve par **récurrence**,

— un raisonnement de **dénombrement**,

— l'utilisation de la **formule du binôme**.