Chapitre 16

Fractions rationnelles

Sommaire

OBJECTIFS

ils sont particulièrement modestes ! à la fin de ce chapitre, vous devrez savoir

- ▷ utiliser les **théorèmes 16.22 et 16.21** pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, de première ou deuxième espèce
- ▷ utiliser la DES d'une fraction rationnelle pour calculer ses primitives.

I Corps des fractions rationnelles

1 L'ensemble $\mathbf{K}(X)$

1.a Définition

Définition : *On appelle* ***fraction rationnelle*** *à coefficients dans* $\mathbf{K}$ *et d'indéterminée* X *toute expression de la forme* $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$, *où* P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbf{K}[X]$ *et* Q *n'est pas le polynôme nul.*
On note $\mathbf{K}(X)$, *l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans* $\mathbf{K}$, *et d'indéterminée* X.

Exemples :

1. tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ définit une fraction rationnelle : $F(X) = \dfrac{P(X)}{1}$.

2. $F(X) = \dfrac{X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X - 3}{X^3 - 7X^2 + 2X + 1}$ est une fraction rationnelle à coefficients réels.

Définition : Égalité de deux fractions rationnelles —. *Soit* $F_1(X) = \dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ *et* $F_2(X) = \dfrac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ *deux fractions rationnelles. Par définition,*

$$F_1(X) = F_2(X) \iff P_1(X) \times Q_2(X) = P_2(X) \times Q_1(X)$$

Exemple : $\dfrac{X-1}{X^2-1} = \dfrac{1}{X+1}$

Remarque : Soit F une fraction rationnelle. $F = 0$ *si et seulement si* son numérateur est nul.

1.b Forme irréductible d'une fraction rationnelle

L'exemple précédent montre qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'une fraction rationnelle. En revanche, quitte à simplifier, numérateur et dénominateur par leur $PGCD$, on peut toujours présenter une fraction rationnelle à l'aide de polynômes premiers entre eux :

Proposition 16.1.— Représentant irréductible d'une fraction rationnelle —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$, il existe un couple $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, unique tel que

- Q est unitaire,
- P et Q sont premiers entre eux,
- $F = \dfrac{P}{Q}$.

La fraction $\dfrac{P}{Q}$ est appelée, **représentant irréductible** de F.

En pratique : pour déterminer la forme irréductible d'une fraction rationnelle, vous simplifiez numérateur et dénominateur par leur PGCD.

Démonstration $\triangledown$

- **Unicité :** soit (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) deux couples de polynômes vérifiant les trois propriétés ci-dessus. Alors par définition de l'égalité des fractions rationnelles, $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.
En particulier, Q_1 divise $P_1 Q_2$. Comme $P_1 \wedge Q_1 = 1$, il résulte du **Théorème de Gauss** que Q_1 divise Q_2. De même, Q_2 divise Q_1. Ainsi Q_1 et Q_2 sont associés. Comme ils sont de plus unitaires, ils sont égaux. Il s'ensuit aisément que $P_1 = P_2$.
- **Existence :** Soit $F = \dfrac{P_o}{Q_o}$. Notons $D = a\,PGCD(P_o, Q_o)$, où a est le coefficient dominant de Q_o. On considère alors les quotients (P, Q) de la division euclidienne de P_o et Q_o par D. On a donc $Q_o = DQ$ et $P_o = DP$.
  - ▹ En examinant les coefficients dominants dans l'égalité $Q_o = DQ$, on obtient que Q est unitaire,
  - ▹ Par les propriétés du $PGCD$ nous avons $D = a\ PGCD(P_o, Q_o) = a\,D \times PGCD(P, Q)$.
  Par conséquent, $PGCD(P, Q) \in \mathbf{K}^\star$, ce qui prouve que P et Q sont premiers entre eux.
  - ▹ Enfin $P_o \times Q = D \times P \times Q = P \times D \times Q = P \times Q_o$. Par définition, c'est dire que $\dfrac{P_o}{Q_o} = \dfrac{P}{Q}$. ▲

Exercice : Déterminez les représentants irréductibles des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^6 - 1}{X^4 - 1} \in \mathbf{R}(X)$

2. $\dfrac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2} \in \mathbf{R}(X)$

Solution $\triangledown$

1. $\dfrac{X^6 - 1}{X^4 - 1} = \dfrac{\left(X^2\right)^3 - 1}{\left(X^2\right)^2 - 1} = \dfrac{(X^2 - 1)\left(X^4 + X^2 + 1\right)}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)} = \dfrac{X^4 + X^2 + 1}{X^2 + 1}$.

2. $\dfrac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2} = \dfrac{(X^2(X^2 - 1)}{(X - 1)(X - 2)} = \dfrac{X^2(X + 1)}{X - 2} = \dfrac{X^3 + X^2}{X - 2}$. ▲

1.c Fonction rationnelle associée

Définition : *Soit $F \in \mathbf{K}(X)$, une fraction rationnelle de représentant irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$. On appelle* **fonction rationnelle** *associée à F, et on note $\tilde{F}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbf{K} \mid \tilde{Q}(x) \neq 0\}$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ par*

$$\tilde{F}(x) = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

Proposition 16.2.— Soient $(F_1, F_2) \in \mathbf{K}(X)^2$ et $K \subset \mathbf{K}$ une partie infinie de $\mathbf{K}$.

$$\textbf{Si } \forall x \in K, \quad \tilde{F}_1(x) = \tilde{F}_2(x), \textbf{ alors } F_1 = F_2.$$

Remarque : la réciproque est également vraie.

Démonstration $\triangledown$

Écrivons $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$. Par hypothèse pour tout $x \in K$, on a $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Autrement dit

$$\forall x \in K, \quad P_1(x)Q_2(x) = P_2(x)Q_1(x)$$

Ainsi, le polynôme $P_1 Q_2 - P_2 Q_1$ admet une infinité de racines dans $\mathbf{K}$. Il ne peut s'agir que du polynôme nul. Par définition de l'égalité de deux fractions rationnelles, cela signifie précisément que $F_1 = F_2$. ▲

2 Opérations algébriques dans $\mathbf{K}(X)$

2.a Structure de corps

Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est identifié à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$. À l'aide de cette identification, nous pouvons voir $\mathbf{K}[X]$ comme un sous-ensemble de $\mathbf{K}(X)$:

$$\mathbf{K}[X] \subset \mathbf{K}(X)$$

Nous pouvons alors prolonger les opérations algébriques sur les polynômes en des opérations sur les fractions rationnelles :

Définition : Opérations algébriques dans $\mathbf{K}(X)$ —. *Soit* $(F_1, F_2) \in \mathbf{K}(X)^2$ *un couple de fractions rationnelles,* $\lambda \in \mathbf{K}$. *On suppose que* $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$. *On définit*

- *l'addition des fractions rationnelles par* $\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$
- *La multiplication des fractions rationnelles par* $\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$
- *La multiplication par un scalaire par* $\lambda \cdot \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{\lambda \cdot P_1}{Q_1}$

En pratique : pour expliciter la somme $F_1 + F_2$, choisissez si possible un meilleur dénominateur commun que Q_1Q_2.

Théorème 16.3.— $\big(\mathbf{K}(X), +, \times\big)$ est un corps.

Démonstration $\triangledown$

- on déduit aisément des propriétés algébriques de $\mathbf{K}[X]$ que $\big(\mathbf{K}(X), +, \times\big)$ est un anneau commutatif.
- Toute fraction rationnelle non nulle est inversible. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec P et Q non nuls, alors $F^{-1} = \dfrac{Q}{P}$. ▲

2.b Calculs dans $\mathbf{K}(X)$

Comme $\mathbf{K}(X)$ est un corps, nous retrouvons les règles de calcul usuelles dans les corps, en particulier, la **Formule du binôme de Newton** et l'**identité géométrique**. Par exemple,

- dans $\mathbf{K}[X]$, nous avons $X^{n+1} - 1 = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$
- dans $\mathbf{K}(X)$, nous avons $\dfrac{X^{n+1}-1}{X-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$

Dans $\mathbf{K}(X)$, nous pouvons diviser par $X - 1$ car ce n'est pas le polynôme nul, il s'agit donc d'une fraction rationnelle inversible.

3 Degré d'une fraction rationnelle

3.a Définition

Proposition-Définition 16.4.— Degré d'une fraction rationnelle —. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On définit le degré de F par

$$d^\circ F = d^\circ P - d^\circ Q$$

Remarques :

- $d^\circ(F)$ est indépendant de la représentation de F.
- $d^\circ(F) \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$

Démonstration $\triangledown$

Soit (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) des représentations d'une même fraction rationnelle, *i.e.*

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

Autrement dit, $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Par les propriétés algébriques du degré des polynômes, il s'ensuit que $d^\circ P_1 + d^\circ Q_2 = d^\circ P_2 + d^\circ Q_2$, ce qui revient à dire que

$$d^\circ P_1 - d^\circ Q_1 = d^\circ P_2 - d^\circ Q_2$$

▲

Exemples :

- la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1}$ est de degré -1.
- la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^3+X^2}{X^3-1}$ est de degré 0

En particulier, lorsque $F = \dfrac{P}{1}$ est un polynôme, les degrés coincident $d^\circ F = d^\circ P$. Ainsi, le degré des fractions rationnelles prolonge de façon naturelle le degré des polynômes. Il en résulte que les propriétés algébriques du degré des polynômes s'étendent au cas des fractions rationnelles.

3.b Propriétés algébriques du degré des fractions rationnelles

Proposition 16.5.— Soient $(F_1, F_2) \in \mathbf{K}(X)^2, \lambda \in \mathbf{K}^\star$.
- $d^\circ(F_1+F_2) \leq \max\{d^\circ F_1, d^\circ F_2\}$
- $d^\circ\big(F_1 \times F_2\big) = d^\circ F_1 + d^\circ F_2$
- $d^\circ(\lambda \cdot F_1) = d^\circ F_1$.

Démonstration $\triangledown$
Notons $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$ et $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$. Alors

- à l'aide des propriétés algébriques du degré des polynômes, on a :

$$\begin{aligned} d^\circ(F_1+F_2) &= d^\circ\left(\frac{P_1Q_2+P_2Q_1}{Q_1Q_2}\right) = d^\circ(P_1Q_2+P_2Q_1) - d^\circ(Q_1Q_2) \\ &\leq \max\{d^\circ P_1 + d^\circ Q_2; d^\circ P_2 + d^\circ Q_2\} - d^\circ Q_1 - d^\circ Q_2 \\ &\leq \max\{d^\circ P_1 - d^\circ Q_1; d^\circ P_2 - d^\circ Q_2\} = \max\{d^\circ F_1; d^\circ F_2\}. \end{aligned}$$

- en ce qui concerne le degré du produit, nous avons,

$$\begin{aligned} d^\circ(F_1 \times F_2) &= d^\circ\left(\frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}\right) = d^\circ(P_1) + d^\circ(P_2) - d^\circ(Q_1) - d^\circ(Q_2) \\ &= d^\circ(P_1) - d^\circ(Q_1) + d^\circ(P_2) - d^\circ(Q_2) = d^\circ F_1 + d^\circ F_2. \end{aligned}$$

- le dernier point est une conséquence du précédent. ▲

4 Dérivation dans $\mathbf{K}(X)$

Ce paragraphe est *hors-programme*.

4.a Fraction rationnelle dérivée

Définition : *Soit* $F = \dfrac{P}{Q}$ *une fraction rationnelle présentée sous forme irréductible. On appelle* ***fraction rationnelle dérivée*** *de* F*, et on note* F'*, la fraction*

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Proposition 16.6.— Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle donnée par $F = \dfrac{P}{Q}$. Alors

$$\boxed{F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}}$$

Démonstration $\triangledown$
Il s'agit de prouver que la fraction rationnelle $\dfrac{P'Q-PQ'}{Q^2}$ est indépendante de la représentation $F=\dfrac{P}{Q}$.
Soit donc (P_1,Q_1) et $P_2Q_2)$ tels que $\dfrac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2}{Q_2}$. Par définition de l'égalité des fractions rationnelles, il en résulte que

$$\begin{aligned} P_1Q_2 &= P_2Q_1 \qquad (16.1)\\ P_1'Q_2-P_2'Q_1 &= P_2Q_1'-P_1Q_2' \end{aligned}$$

Il s'agit de prouver que $\dfrac{P_1'Q_1-P_1Q_1'}{Q_1^2}=\dfrac{P_2'Q_2-P_2Q_2'}{Q_2^2}$, ce qui compte tenu de la définition de l'égalité des fractions rationnelles revient à prouver que

$$Q_2^2\big[P_1'Q_1-P_1Q_1'\big]=Q_1^2\big[P_2'Q_2-P_2Q_2'\big]$$

Or d'après (16.1), (utilisée entre crochets) on a

$$\begin{aligned} Q_2^2\big[P_1'Q_1-P_1Q_1'\big]-Q_1^2\big[P_2'Q_2-P_2Q_2'\big] &= Q_1Q_2\big[P_1'Q_2-P_2'Q_1\big]-\big[P_1Q_2\big](Q_2Q_1')+\big[P_2Q_1\big](Q_1Q_2')\\ &= Q_1Q_2\big[P_2Q_1'-P_1Q_2'\big]-\big[P_2Q_1\big](Q_2Q_1')+\big[P_1Q_2\big](Q_1Q_2')\\ &= Q_1Q_2\big(P_2Q_1'-P_1Q_2'\big)-Q_1Q_2\big(P_2Q_1'-P_1Q_2'\big)=0 \end{aligned}$$

▲

4.b Propriétés algébriques de la dérivation

Comme pour le degré, la notion de dérivée prolonge celle des polynômes. Le lecteur sceptique pourra avec profit démontrer les propriétés suivantes :

Proposition 16.7.— Soit $(F_1,F_2)\in \mathbf{K}(X)^2$. Alors
- $(F_1+F_2)'=F'+F_2'$
- $(F_1\times F_2)'=F'\times F_2+F_1\times F_2'$
- $\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right)'=\dfrac{F_1'F_2-F_1F_2'}{F_2^2}$, si $F_2\neq 0$.

Exercice : Soit $n\in\mathbf{N}^\star$, et $a\in\mathbf{K}$, alors $\left(\dfrac{1}{(X-a)^n}\right)'=-\dfrac{n}{(X-a)^{n+1}}$

Proposition 16.8.— Soit $F\in\mathbf{K}(X)$, alors

$$\boxed{d^\circ F'\leq d^\circ F-1}$$

Commentaires : en revanche, on n'a pas toujours $d^\circ F'=d^\circ F-1$, même lorsque F n'est pas constante, comme le montre par exemple $F=\dfrac{X^3+1}{X^3}=1+\dfrac{1}{X^3}$

Démonstration $\triangledown$
Rappelons tout d'abord que cette propriété est valide dans le cas de la dérivée d'un polynôme.
Soit $F=\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. Alors

$$\begin{aligned} d^\circ(F') &= d^\circ\left(\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}\right)=d^\circ(P'Q-PQ')-d^\circ(Q^2)\leq \max\{d^\circ P'+d^\circ Q;d^\circ P+d^\circ Q'\}-2d^\circ Q\\ &\leq \max\{(d^\circ P-1)+d^\circ Q;d^\circ P+(d^\circ Q-1)\}-2d^\circ Q\leq d^\circ P-d^\circ Q-1=d^\circ F-1 \end{aligned}$$

Le résultat en découle par transitivité. ▲

4.c Dérivées successives d'une fraction rationnelle

Définition : *Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle, on définit la suite des dérivées successives de F par les relations*

$$\begin{cases} \bullet \quad F^{(0)} = F \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbf{N},\ F^{(n+1)} = \left(F^{(n)}\right)' \end{cases}$$

Proposition 16.9.— Formule de Leibniz —. Soit $(F_1, F_2) \in \mathbf{K}(X)^2$ et $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\boxed{\left(F_1 \times F_2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_1^{(k)} \times F_2^{(n-k)}}$$

Démonstration $\triangledown$
La démonstration est identique à celle dans $\mathbf{K}[X]$. ▲

5 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

5.a Définition

Définition : *Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle présentée* ***sous forme irréductible****.*

- *On appelle* ***zéro*** *de F les zéros de P. Si a est un zéro de P d'ordre de multiplicité p, on dit que a est un zéro de F de multiplicité p.*
- *On appelle* ***pôle*** *de F les zéros de Q. Si a est un zéro de Q d'ordre de multiplicité p, on dit que a est un pôle de F de multiplicité p.*

Vocabulaire :

- *un zéro (resp. pôle) de F d'ordre de multiplicité 1 est appelé un* ***zéro*** *(resp. pôle)* ***simple****.*
- *un zéro (resp. pôle) de F d'ordre de multiplicité 2 est appelé un* ***zéro*** *(resp. pôle)* ***double****.*

Remarque : comme P et Q sont premiers entre eux, un élément $a \in \mathbf{K}$ ne peut être à la fois racine et pôle d'une même fraction rationnelle.

Exercice : Soit $F = \dfrac{X^4 - X^2}{X^2 - 3X + 2} \in \mathbf{R}(X)$. Déterminez les pôles et les zéros de F.

En pratique : pour déterminer zéros et pôles d'une fraction rationnelle, vous pouvez d'abord rechercher la forme irréductible de F, ou bien comparer directement les ordres de multiplicité en tant que racine du dénominateur et du numérateur à l'aide de la proposition qui suit.

5.b Caractérisation des zéros et pôles

Proposition 16.10.— Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle non nulle et $a \in \mathbf{K}$. Notons α et β les ordres de multiplicité de a comme racine de P et de Q respectivement. Alors

- **si** $\alpha - \beta > 0$, **alors** a est un zéro de F d'ordre de multiplicité $\alpha - \beta$.
- **si** $\alpha - \beta = 0$, **alors** a n'est ni un zéro ni un pôle de F.
- **si** $\alpha - \beta < 0$, **alors** a est un pôle de F d'ordre de multiplicité $\beta - \alpha$.

Commentaires : dans cet énoncé, dire que a est une racine d'ordre de multiplicité 0 d'un polynôme signifie simplement que a n'est pas racine de ce polynôme.

Démonstration $\triangledown$
Écrivons $P = (X-a)^\alpha \times \hat{P}$ et $Q = (X-a)^\beta \times \hat{Q}$, où $\hat{P}(a) \neq 0$ et $\hat{Q}(a) \neq 0$, de sorte que

$$F = \frac{(X-a)^\alpha \times \hat{P}}{(X-a)^\beta \times \hat{Q}}$$

Quitte à simplifier cette fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, supposons sans perte de généralité que $\dfrac{\hat{P}}{\hat{Q}}$ est irréductible.

- Si $\alpha > \beta$, le représentant irréductible de F est $F = \dfrac{(X-a)^{\alpha-\beta} \times \hat{P}}{\hat{Q}}$.
  Ainsi, a est racine d'ordre de multiplicité $\alpha - \beta$ du numérateur dans la représentation irréductible de F, par définition, cela revient à dire que a est racine d'ordre de multiplicité $\alpha - \beta$ de F.
- Si $\alpha = \beta$, le représentant irréductible de F est $F = \dfrac{\hat{P}}{\hat{Q}}$.
  Ainsi, a n'est pas racine ni du numérateur ni du dénominateur dans la représentation irréductible de F, par définition, cela revient à dire que a est un $ni - ni$.
- Si $\alpha < \beta$, le représentant irréductible de F est $F = \dfrac{\hat{P}}{(X-a)^{\beta-\alpha} \times \hat{Q}}$.
  Ainsi, a est racine d'ordre de multiplicité $\alpha - \beta$ du dénominateur dans la représentation irréductible de F, par définition, cela revient à dire que a est un pôle d'ordre de multiplicité $\beta - \alpha$ de F. ▲

Proposition 16.11.— Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On note $F = \dfrac{P'}{P}$. Les pôles de F sont les zéros de P, ce sont tous des pôles simples.

Démonstration ▽
Notons $\mathcal{Z}(P) = \{x \in \mathbf{K} \mid P(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de P. Convenons aussi de noter pour $a \in \mathbf{K}$,

— α l'ordre de multiplicité de a comme zéro de P'

— β l'ordre de multiplicité de a comme zéro de P.

- soit $a \in \mathbf{K} \setminus \mathcal{Z}(P)$. Comme $a \notin \mathcal{Z}(P)$, $\beta = 0$. Par suite $\alpha - \beta = \alpha \in \mathbf{N}$. D'après la **Proposition** précédente, a n'est donc pas un pôle de F.
- soit $a \in \mathcal{Z}(P)$. D'après la caractérisation des racines multiples (**Théorème** 15.26), il s'ensuit que $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(\beta-1)}(a) = 0$ et $P^{(\beta)}(a) \neq 0$. En particulier, a est racine d'ordre $\beta - 1$ de P'. Ainsi $\alpha - \beta = (\beta - 1) - \beta = -1$. Par la **Proposition** précédente, cela revient à dire que a est un pôle d'ordre 1 de F. ▲

II Décomposition en éléments simples

1 Étude théorique de la décomposition en éléments simples

Étant donnée une fraction rationnelle, on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire de fractions plus simples, notamment en vue de calculer ses primitives. L'étude théorique qui suit sert à démontrer le **théorème 16.21** et le **théorème 16.22**. Ces démonstrations sont *hors-programme*.

1.a Partie entière d'une fraction rationnelle

Théorème 16.12.— Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle. Il existe un couple $(E, G) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X)$ unique tel que

- $F = E + G$
- E est un polynôme
- G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif

E est appelée la **partie entière** de F.

Notation : *la partie entière de F est notée $E = Ent(F)$.*

Démonstration ▽

- **Unicité :** Soit (E_1, G_1) et (E_2, G_2) deux couples vérifiant les conditions ci-dessus. Il vient

$$E_1 - E_2 = G_2 - G_1$$

Comme G_1 et G_2 sont de degrés strictement négatifs, il découle des propriétés algébriques du degré des fractions rationnelles que leur différence l'est aussi. Or par construction $E_1 - E_2$ est un polynôme. Il s'agit donc d'un polynome de degré strictement négatif. Par conséquent, $E_1 - E_2$ est le polynôme nul. Il en résulte immédiatement que $G_1 = G_2$.

- **Existence :** Soit $F = \dfrac{A}{B}$, où A et B sont deux polynômes. Ecrivons la division euclidienne de A par B. Il existe un couple (E, R) tel que
$$A = EB + R \text{ et } d^\circ R < d^\circ B$$
Ainsi, $F = E + \dfrac{R}{B}$, où $E \in \mathbf{K}[X]$ et $\dfrac{R}{B}$ est une fraction de degré strictement négatif. ▲

En pratique : la démonstration est constructive, pour déterminer la partie entière de $F = \dfrac{A}{B}$, vous effectuez la division euclidienne de A par B. Le quotient est la partie entière de F.

Remarques :

1. Si $d^\circ F < 0$, alors $Ent(F) = 0$.
2. Pour toute fraction rationnelle $F \in \mathbf{K}(X)$, $F - Ent(F)$ est une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

Exercice : Déterminez la partie entière de $\dfrac{X^3 + X - 1}{X^2 - X + 1}$.

1.b Séparation des pôles

Théorème 16.13.— Soit $G = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif. On suppose le dénominateur factorisé sous la forme $Q = Q_1 \times Q_2$, où $Q_1 \wedge Q_2 = 1$. Alors, il existe un couple $(P_1, P_2) \in \mathbf{K}[X]^2$, unique tel que

- $G = \dfrac{P(X)}{Q_1(X) \times Q_2(X)} = \dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)} + \dfrac{P_2(X)}{Q_2(X)}$
- $d^\circ(P_1) < d^\circ(Q_1)$
- $d^\circ(P_2) < d^\circ(Q_2)$

Démonstration ▽

- **Unicité :** soit (P_1, P_2) et $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ des couples vérifiant :
$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{\tilde{P}_1}{Q_1} + \frac{\tilde{P}_2}{Q_2}, \text{ soit encore } P_1Q_2 + P_2Q_1 = \tilde{P}_1Q_2 + \tilde{P}_2Q_1$$
Ainsi,
$$Q_2(P_1 - \tilde{P}_1) = Q_1(\tilde{P}_2 - P_2)$$
D'après le **lemme de Gauss**, comme Q_2 divise $Q_1(\tilde{P}_2 - P_2)$ et $Q_1 \wedge Q_2 = 1$, on en déduit que Q_2 doit diviser $\tilde{P}_2 - P_2$. Il existe donc un polynôme B tel que
$$\tilde{P}_2 - P_2 = Q_2 \times B$$
De plus, d'une part $d^\circ(\tilde{P}_2 - P_2) \leq \max\{d^\circ(P_2), d^\circ(\tilde{P}_2)\} < d^\circ(Q_2)$ et d'autre part, $d^\circ(\tilde{P}_2 - P_2) = d^\circ(Q_2) + d^\circ(B)$. Il s'ensuit que le polynôme B doit être de degré strictement négatif, ce qui n'est possible que si B est le polynôme nul. Finalement, il en résulte que $\tilde{P}_2 = P_2$ puis que $\tilde{P}_1 = P_1$.
- **Existence :** elle repose sur le **Théorème de Bézout**. Comme Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, il existe un couple (U_1, U_2) de polynômes tel que
$$U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1$$
D'où l'on tire que $G(X) = \dfrac{P(X)}{Q_1(X)Q_2(X)} = \dfrac{P(X)U_2(X)}{Q_1(X)} + \dfrac{P(X)U_1(X)}{Q_2(X)}$. Pour conclure, on effectue la décomposition en partie entière et partie fractionnaire de chacune de ces deux fractions :
$$G(X) = E_1(X) + E_2(X) + \frac{P_1(X)}{Q_1(X)} + \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$
Finalement, comme $d^\circ(G) < 0$, $d^\circ(F_1) < 0$, $d^\circ(F_2) < 0$, il en résulte que $d^\circ(E_1 + E_2) < 0$, ce qui n'est possible que si $E_1 + E_2 = 0$. ▲

1.c Partie polaire relative à un pôle

Théorème 16.14.— Soit $G = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif présentée sous forme irréductible. Soit a un pôle de G de multiplicité $p \in \mathbf{N}^\star$.

$$G(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^p \times Q_2(X)}, \text{ où } Q_2(a) \neq 0.$$

Il existe un couple de polynômes $(R_1, R_2) \in \mathbf{K}[X]^2$, unique tel que

- $G(X) = \dfrac{R_1(X)}{(X-a)^p} + \dfrac{R_2(X)}{Q_2(X)}$
- $d^\circ(R_1) < p, d^\circ(R_2) < d^\circ(Q_2)$

Notation : *plus généralement, si F est une fraction rationnelle qui admet en $a \in \mathbf{K}$ un pôle d'ordre p, alors F s'écrit de manière unique, sous la forme $F(X) = \underbrace{E(X) + F_2(X)}_{G(X)} + \underbrace{\dfrac{R_1(X)}{(X-a)^p}}_{F_a(X)}$, où $G(X)$ est une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle en a et F_a est* ***la partie polaire de F relative au pôle a.***

Démonstration $\triangledown$
Comme a un pôle de G de multiplicité $p \in \mathbf{N}^\star$, on a $G(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^p \times Q_2(X)}$, où $Q_2(a) \neq 0$. Les polynômes $Q_2(X)$ et $(X-a)^p$ sont premiers entre eux et d'après le théorème précédent, G s'écrit de manière unique sous la forme

$$G(X) = \frac{R_1(X)}{(X-a)^p} + \frac{R_2(X)}{Q_2(X)},$$

avec $d^\circ(R_1) < p, d^\circ(R_2) < d^\circ(Q_2)$. $\blacktriangle$

1.d Décomposition d'une fraction à dénominateur scindé

Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle présentée sous forme irréductible. On suppose que $Q(X)$ est scindé sur $\mathbf{K}$:

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{p_i}.$$

Alors $F(X) = E(X) + \dfrac{R(X)}{Q(X)} = E(X) + \dfrac{R_1(X)}{(X-a_1)^{p_1}} + \dfrac{\hat{R}_1(X)}{\hat{Q}_1(X)}$, où $\hat{Q}_1(X) = \displaystyle\prod_{i=2}^{r} (X - a_i)^{p_i}$.
On recommence en isolant la partie polaire relative au pôle a_2. Ainsi de suite, on obtient :

Proposition 16.15.— Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$. On suppose que le dénominateur est scindé :

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{p_i}.$$

Alors $F(X)$ est la somme de sa partie entière et de ses différentes parties polaires :

$$\boxed{\begin{aligned} F(X) &= E(X) + F_{a_1}(X) + F_{a_2}(X) + \cdots + F_{a_r}(X) \\ &= E(X) + \frac{R_1(X)}{(X-a_1)^{p_1}} + \frac{R_2(X)}{(X-a_2)^{p_2}} + \cdots + \frac{R_r(X)}{(X-a_r)^{p_r}}, \end{aligned}}$$

où $d^\circ(R_i) < p_i$.

Remarque : cette écriture est unique à l'ordre des termes près.

À titre d'exemple, effectuons la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$. Nous avons déjà observé que les pôles de F sont les zéros de P et que leur multiplicité est égale à 1.

Proposition 16.16.— Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme scindé non nul. Notons $(a_1, \ldots, a_n)$ les zéros distincts de P, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ leurs ordres de multiplicités respectifs. Alors

$$\boxed{\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X - a_i)}}$$

Démonstration ▽
Soit $P(X) = a\,(X - a_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X - a_n)^{\alpha_n}$ la décomposition primaire de P dans $\mathbf{C}[X]$.

$$P'(X) = a \sum_{i=1}^{n} (X - a_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times ((X - a_i)^{\alpha_i})' \times \cdots \times (X - a_n)^{\alpha_n}$$

Il en résulte immédiatement que $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X - a_i)}$. ▲

2 Décomposition en éléments simples d'une partie polaire

2.a Un résultat général

Proposition 16.17.— Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle, et $a \in \mathbf{K}$ un pôle de F. Il existe un p-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$ de scalaires, unique tel que

$$\boxed{F_a(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{(X - a)^{p-k}} = \frac{\lambda_0}{(X - a)^p} + \frac{\lambda_1}{(X - a)^{p-1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p-1}}{X - a}}$$

Remarque : pour un pôle d'ordre $p \in \mathbf{N}^\star$, il y a p coefficients $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1})$.

Démonstration ▽
Par définition de la partie polaire relative à un pôle de multiplicité p de F, il existe $R \in \mathbf{K}_{p-1}[X]$ tel que

$$F_a(X) = \frac{R(X)}{(X - a)^p}$$

Comme R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p - 1$, la **formule de Taylor** pour les polynômes montre que R s'écrit (de manière unique) sous la forme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (X - a)^k$. Par conséquent

$$F_a(X) = \frac{1}{(X - a)^p} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k (X - a)^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{(X - a)^{p-k}}$$

▲

2.b Partie polaire relative à un pôle simple

Proposition 16.18.— Pôle simple —. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle présentée sous forme irréductible. On suppose que $a \in \mathbf{K}$ est un pôle simple de F, *ie* que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a) \times \hat{Q}(X)}$ où $\hat{Q}(a) \neq 0$.
La DES de F s'écrit $F(X) = G(X) + \dfrac{\lambda_0}{(X-a)}$, où G est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle en a et λ_0 est donné par :

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{P}{\hat{Q}}(a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$$

En pratique :

- lorsque vous pouvez déterminer aisément $\hat{Q}$, vous utilisez la première expression.
- la deuxième formule est très utile lorsque la factorisation $Q = (X-a)\hat{Q}$ n'est pas aisée.

Démonstration ▽
D'après la proposition partie polaire, nous savons déjà que F s'écrit de manière unique, sous la forme $F(X) = \dfrac{\lambda_0}{X-a)} + G(X)$. Ainsi

$$\frac{P}{\hat{Q}}(X) = (X-a)F = \lambda_0 + (X-a) \times G(X)$$

En évaluant cette égalité en $x = a$, nous obtenons $\lambda_0 = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)(a)$. Pour la deuxième expression de λ_0, remarquons que par définition de $\hat{Q}$, nous avons $Q = (X-a) \times \hat{Q}$. Dérivons cette égalité polynomiale, il vient

$$Q'(X) = \hat{Q}(X) + (X-a) \times \hat{Q}'(X)$$

Évaluons cette égalité en $x = a$, il vient $Q'(a) = \hat{Q}(a)$. Ainsi, $\lambda_0 = \dfrac{P(a)}{\hat{Q}(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$. ▲

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Décomposez la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$

Solution ▽

$\boxed{1}$ *F est présentée sous forme irréductible.*

$\boxed{2}$ *$d°F < 0$, sa partie entière est nulle.*

$\boxed{3}$ *Les racines de Q sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Il s'agit de racines simples.*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{(X-\omega_k)}$*

$\boxed{5}$ *utilisons la deuxième méthode $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda_k = \dfrac{1}{Q'(\omega_k)} = \dfrac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{\omega_k}{n}$. Ainsi, $F(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{(X-\omega_k)}$* ▲

2.c Partie polaire relative à un pôle double

Proposition 16.19.— Pôle double —. Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle présentée sous forme irréductible. On suppose que $a \in \mathbf{K}$ est un pôle double de F, *ie* que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X-a)^2 \times \hat{Q}(X)}$ où $\hat{Q}(a) \neq 0$.
La DES de F s'écrit $F(X) = G(X) + \dfrac{\lambda_0}{(X-a)^2} + \dfrac{\lambda_1}{(X-a)}$, où G est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle en a et λ_0 et λ_1 sont donnés par :

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{P}{\hat{Q}}(a) \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)'(a)}$$

En pratique :

- lorsque vous pouvez déterminer λ, vous utilisez la première expression.
- la deuxième formule est très utile lorsque l'expression de $\dfrac{P}{\hat{Q}}$ est assez simple à dériver (c'est souvent le cas) sinon, vous recherchez une deuxième équation, comme dans les exemples ci-dessous.

Démonstration $\triangledown$
D'après la proposition **Partie polaire**, nous savons déjà que F s'écrit de manière unique, sous la forme $F(X) = \dfrac{\lambda_0}{X-a)^2} + \dfrac{\lambda_1}{(X-a)} + G(X)$, où G est une fraction qui n'a pas de pôle en a. Ainsi

$$\frac{P}{\hat{Q}}(X) = (X-a)^2 F(X) = \lambda_0 + \lambda_1 (X-a) + (X-a)^2 \times G(X)$$

En évaluant cette égalité en $x = a$, nous obtenons $\lambda_0 = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)(a)$.
Pour l'expression de λ_1, dérivons l'égalité ci-dessus, il vient

$$\left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)'(X) = \left((X-a)^2 F(X)\right)' = \lambda_1 + 2(X-a) \times G(X) + (X-a) \times G'(X)$$

Évaluons cette égalité en $x = a$, il vient $\lambda_1 = \left(\dfrac{P}{\hat{Q}}\right)'(a) = \lambda_1$. ▲

Exercice : Décomposez dans $\mathbf{C}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X^2(X^2+X+1)}$

Solution $\triangledown$
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ *F est présentée sous forme irréductible, de degré strictement négatif.*
$\boxed{3}$ *le dénominateur $Q(X) = X^2(X-j)(X-\bar{j})$ est scindé. Nous appliquons la* **Proposition 16.15**.
$\boxed{4}$

$$F(X) = \frac{a_0}{X^2} + \frac{a_1}{X} + \frac{b_0}{(X-j)} + \frac{c_0}{(X-\bar{j})}$$

$\boxed{5}$ *En utilisant les* **propositions pôles simples et pôles doubles**, *il vient*

$$F(X) = \frac{1}{X^2(X^2+X+1)} = \frac{1}{X^2} - \frac{1}{jX} + \frac{1}{(1-j)(X-j)} + \frac{1}{(1-\bar{j})(X-\bar{j})}$$

2.d Partie polaire relative à un pôle multiple

Ce paragraphe est *hors programme*. Dans le cas de pôle d'ordre supérieur ou égal à 3, les propositions "pôle simple" et "pôle double" se généralisent de la façon suivante :

Proposition 16.20.— Pôle multiple —. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ de représentant irréductible $\frac{P}{Q}$. On suppose que $a \in \mathbf{K}$ est un pôle d'ordre $p \in \mathbf{N}^\star$ de F. Notons $\hat{Q}$ le polynôme tel que $F(X) = \frac{P(X)}{(X-a)^p \times \hat{Q}(X)}$ et $\hat{Q}(a) \neq 0$. La partie polaire de F en a s'écrit

$$F_a(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{(X-a)^{p-k}} = \frac{\lambda_0}{(X-a)^p} + \frac{\lambda_1}{(X-a)^{p-1}} + \cdots + \frac{\lambda_{p-1}}{(X-a)}.$$

où les $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ sont donnés par :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad \lambda_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)^{(k)}(a)}$$

En pratique : Vous utilisez cette proposition pour calculer le coefficient λ_0 de $\frac{1}{(X-a)^p}$ et pour λ_k, lorsque les dérivées de la fraction $\frac{P}{\hat{Q}}$ ne conduisent pas à des calculs trop lourds.

Démonstration ▽

$$(X-a)^p \times F = \frac{P}{\hat{Q}} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_j (X-a)^k + (X-a)^p \times G$$

Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$, et dérivons i fois l'égalité ci-dessus. Il vient

$$\left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)^{(i)} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \left((X-a)^k\right)^{(i)} + ((X-a)^p \times G)^{(i)}$$

Comme la dérivée $i^{\text{ième}}$ de $(X-a)^k$ vaut $\frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k-i}$ si $i \leq k$ et 0 sinon, nous obtenons en évaluant au point a, que $\left((X-a)^k\right)^{(i)}(a) = \frac{k!}{(k-i)!}\delta_{i,k} = i!\delta_{i,k}$. Ainsi, en évaluant au point a, il vient $\left(\frac{P}{\hat{Q}}\right)^{(i)}(a) = i!\,\lambda_i$. ▲

Exercice : Décomposez la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^3}$

Solution ▽

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ *F est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle. Q admet deux pôles, 0 (double) et 1 (triple).*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit* $F = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{(X-1)}$

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{lcll}
X^2F(X) & = & \frac{1}{(X-1)^3} & \xrightarrow[x=0]{} a = -1 \\
\left[X^2F\right]' & = & -\frac{3}{(X-1)^4} & \xrightarrow[x=0]{} b = -3 \\
(X-1)^3F(X) & = & \frac{1}{X^2} & \xrightarrow[x=1]{} c = 1 \\
\left[(X-1)^3F\right]' & = & \left[\frac{1}{X^2}\right]' = -\frac{2}{X^3} & \xrightarrow[x=1]{} d = -2 \\
\left[(X-1)^3F\right]^{(2)} & = & = \frac{6}{X^4} & \xrightarrow[x=1]{} e = 3
\end{array}$$

Ainsi, $$F = -\frac{1}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)}.$$ ▲

3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}[X]$

D'après le **théorème de D'Alembert-Gauss**, tout polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ est scindé. On peut donc appliquer le théorème de décomposition d'une fraction rationnelle à dénominateur scindé.

3.a Expression de la DES dans $\mathbf{C}(X)$

Théorème 16.21.— Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}(X)$ —. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{C}(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients complexes présentée sous forme irréductible.

$$\boxed{F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}}$$

où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{C}[X]$.

Vocabulaire :

- *les fractions rationnelles de la forme* $\dfrac{a}{(X-\alpha)^k}$ *sont appelées* ***éléments simples*** *de première espèce.*
- *cette écriture, unique à l'ordre des facteurs près s'appelle la décomposition en éléments simples (DES) de* F.

Démonstration ▽

Notons $E = Ent(F)$ la partie entière de F, $F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_r}$ les parties polaires de F relatives à ses différents pôles. Enfin, posons

$$G = F - E - \sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$$

- $F - E$ est une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Chacune des parties polaires F_{α_i} est de degré strictement négatif. Par opérations algébriques sur les degrés des fractions rationnelles, il s'ensuit que la fraction rationnelle G est de degré strictement négatif.
- De plus, par construction, G n'a pas de pôles. Notons $G = \dfrac{P}{Q}$ le représentant irréductible de cette fraction. Comme $\dfrac{P}{Q}$ n'a pas de pôles, le polynôme *unitaire* Q n'a pas de racines. D'après le **Théorème fondamental de l'algèbre**, Q est donc un polynôme constant et unitaire. Par suite Q est le polynôme constant égal à 1 et donc G est un polynôme.
- Ainsi, G est un polynôme de degré strictement négatif, c'est donc le polynôme nul, $G = 0$. ce qui revient à dire que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$$

▲

3.b Pratique de la DES dans $\mathbf{C}(X)$

Soit $F \in \mathbf{C}[X]$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. Pour décomposer F en éléments simples de première espèce, la démarche est la suivante :

$\boxed{1}$ présentez sous forme irréductible : $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

$\boxed{2}$ déterminez la partie entière de F à l'aide de la division euclidienne de P par Q.

$\boxed{3}$ calculez la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{C}[X]$ (trouvez ses racines et leurs ordres de multiplicités.)

$\boxed{4}$ exprimez la DES de F à l'aide de coefficients inconnus :

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$$

$\boxed{5}$ déterminez les coefficients $a_{i,k}$. Pour cela, vous pouvez

- appliquer les formules pôle simple, pôle double, pôle multiple
- évaluer $F(X)$ en des points non polaires
- étudier une limite comme la limite à l'infini de $XF(X)$
- utiliser la conjugaison
- utiliser la parité.

3.c Mise en œuvre

Exercice : Décomposez la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^2}{X^2 - 4X + 3}$

Solution ▽

$\boxed{1}$ *F est présentée sous forme irréductible.*

$\boxed{2}$ $X^2 = 1 \times (X^2 - 4X + 3) + 4X - 3$. *D'où $Ent(F) = 1$.*

$\boxed{3}$ *le dénominateur est scindé $Q(X) = (X - 1) \times (X - 3)$. Q admet deux pôles, simples 1 et 3.*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit $F(X) = 1 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-3}$*

$\boxed{5}$ *utilisons la méthode "pôle simple" :*

$$\begin{array}{rcll} (X-1)F(X) & = & \dfrac{X^2}{X-3} & \xrightarrow[x=1]{} a = \dfrac{9}{2} \\ (X-3)F(X) & = & \dfrac{X^2}{X-1} & \xrightarrow[x=3]{} b = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Ainsi, $$F(X) = 1 - \frac{9}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X-3)}.$$ ▲

Exercice : Décomposez la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X-2}{X(X-1)^2}$

Solution ▽

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ *F est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle. Q admet deux pôles, 0 (simple) et 1 (double).*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)}$*

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{rcll} XF(X) & = & \dfrac{X-2}{(X-1)^2} & \xrightarrow[x=0]{} a = -2 \\ (X-1)^2F(X) & = & \dfrac{X-2}{X} = 1 - \dfrac{2}{X} & \xrightarrow[x=1]{} b = -1 \\ \Big[(X-1)^2F\Big]' & = & \left[\dfrac{X-2}{X}\right]' = \dfrac{2}{X^2} & \xrightarrow[x=1]{} c = 2 \end{array}$$

Ainsi, $$F = -\frac{2}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)}.$$ ▲

Exercice : Décomposez la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X+1}{X^2(X-1)^2}$

Solution ▽

$$F = \frac{1}{X^2} + \frac{3}{X} + \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{3}{(X-1)}$$

4 Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$

4.a Éléments simples de deuxième espèce

Étant donnée une fraction rationnelle $F \in \mathbf{R}(X)$ à coefficients réels. On peut considérer comme fraction rationnelle à coefficients complexes et la décomposer en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$:

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}}$$

De plus, comme F est à coefficients réels, les pôles de F sont des réels ou bien des nombres complexes conjugués. Dans ce cas, les parties polaires relatives à des pôles conjuguées sont elles-mêmes conjuguées. En les regroupant, on fait apparaître des fractions de la forme :

$$\frac{bX+c}{(X^2+\beta X+\gamma)^j} \text{ , où les coefficients } \beta, \gamma, b, c \text{ sont réels et vérifient } \beta^2-4\gamma<0$$

Exemple : si $a \in \mathbf{C}$, $\dfrac{a}{X-\alpha} + \dfrac{\bar{a}}{X-\bar{\alpha}} = \dfrac{2\mathfrak{Re}\,(a)X - 2\mathfrak{Re}\,(a\bar{\alpha})}{X^2 - 2\mathfrak{Re}\,(\alpha)\ X + |\alpha|^2}$.

Vocabulaire : *les éléments* $\dfrac{bX+c}{(X^2+\beta X+\gamma)^j} \in \mathbf{R}(X)$ *où les coefficients* β, γ, b, c *sont des réels qui vérifient* $\beta^2-4\gamma<0$ *sont appelés* ***éléments simples de deuxième espèce.***

4.b Expression de la DES dans $\mathbf{R}(X)$

Théorème 16.22.— Décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}(X)$ —. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{R}(X)$ une fraction rationnelle non nulle à coefficients réels présentée sous forme irréductible.

$$\boxed{F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{i,k}X + c_{i,k}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}}$$

où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$ est la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{R}[X]$.

4.c Pratique de la DES dans $\mathbf{R}(X)$

Soit $F \in \mathbf{R}[X]$ une fraction rationnelle à coefficients complexes. Pour décomposer F en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$, la démarche est la suivante :

$\boxed{1}$ présentez sous forme irréductible : $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

$\boxed{2}$ déterminez la partie entière de F à l'aide de la division euclidienne de P par Q.

$\boxed{3}$ déterminez la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{R}[X]$

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{p_i} \prod_{j=1}^{m}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j}$$

$\boxed{4}$ exprimez la DES de F à l'aide de coefficients inconnus :

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{i,k}X + c_{i,k}}{(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{q_j-k}}$$

$\boxed{5}$ déterminez les coefficients $a_{i,k}$. Pour cela, nous retrouvons les mêmes techniques que dans le cas complexe :

- appliquer les formules pôle simple, pôle double, pôle multiple

- évaluer $F(X)$ en des points non polaires
- étudier une limite comme la limite à l'infini de $XF(X)$
- utiliser la conjugaison
- utiliser la parité.

4.d Mise en œuvre

Exercice : Utilisation d'une limite à l'infini —. Lorsque F est de degré strictement négatif, il est souvent utile d'étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$.

Décomposons la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)^2(X+2)}$.

Solution ▽

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ *F est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle. Q admet deux pôles, -2 (simple) et 1 (double).*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit* $F = \dfrac{a}{(X+2)} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)}$

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{lcll}
(X+2)F(X) & = & \dfrac{1}{(X-1)^2} & \xrightarrow[x=-2]{} a = \dfrac{1}{9} \\
(X-1)^2F(X) & = & \dfrac{1}{(X+2)} & \xrightarrow[x=1]{} b = \dfrac{1}{3} \\
XF(X) & = & \dfrac{X}{(X+2)(X-1)^2} & \xrightarrow[x\to+\infty 1]{} a + c = 0
\end{array}$$

Ainsi, $F = \dfrac{1}{9(X+2)} + \dfrac{1}{3(X-1)^2} - \dfrac{1}{9(X-1)}$. ▲

Exercice : Utilisation de la conjugaison —. Lorsque F est à coefficients réels, les pôles non réels de F sont deux à deux conjugués. Par unicité, les parties polaires associés à deux pôles conjugués sont conjuguées.

Décomposons $F = \dfrac{X^2+X-1}{X(X^2+1)}$.

Solution ▽

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ *F est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle. F admet trois simples 0 i et $-i$.*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit*

$$\begin{array}{lcl}
F & = & \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{(X-i)} + \dfrac{c}{(X+i)} \\
\bar{F} & = & \dfrac{\bar{a}}{X} + \dfrac{\bar{c}}{(X-i)} + \dfrac{\bar{b}}{(X+i)}
\end{array}$$

Par unicité de la DES, il vient b et c sont conjugués.

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{lcll}
XF(X) & = & \dfrac{X^2+X-1}{X^2+1} & \xrightarrow[x=0]{} a = -1 \\
(X-i)F(X) & = & \dfrac{X^2+X-1}{X(X+i)} & \xrightarrow[x=i]{} b = 1 - \dfrac{i}{2}
\end{array}$$

Ainsi, $F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{2-i}{2(X-i)} + \dfrac{2+i}{2(X+i)}$. ▲

Exercice : Utilisation de la parité —. Si F est paire ou impaire, les pôles non nuls de F sont opposés. On exploite l'unicité de la DES en écrivant $F(X) = \pm F(X)$.

Décomposons la fraction $F = \dfrac{1}{(X^2-1)^2}$.

Solution ▽

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ *F est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle. F admet deux pôles doubles 1 et -1. F est paire.*

$\boxed{4}$ *La DES de F s'écrit*

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X+1)} \\ F(-X) &= \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{(X-1)} + \frac{a}{(X+1)^2} - \frac{b}{(X+1)} \end{aligned}$$

Comme F est paire, l'unicité de la DES donne $c = a$ et $d = -b$.

$\boxed{5}$

$$\begin{aligned} (X-1)^2F(X) &= \frac{1}{(X+1)^2} && \xrightarrow[x=1]{} a = \frac{1}{4} \\ \Big[(X-1^2)F(X)\Big]' &= -\frac{2}{(X+1)^3} && \xrightarrow[x=1]{} b = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, $$F = \frac{1}{4(X-1)^2} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{1}{4(X+1)}.$$ ▲

III Application au calcul des primitives

1 Primitives des fractions rationnelles

Soit $\tilde{F}(x) = \dfrac{P}{Q}(x)$ une fraction rationnelle à coefficients réels, présentée sous forme irréductible. Sa décomposition permet d'en déterminer les primitives.

1.a Primitives de $(x-a)^n$, avec $n \in \mathbf{Z}$

Proposition 16.23.— Soit $a \in \mathbf{R}$, sur tout intervalle de $\mathbf{R}$, ne contenant pas a, on a

$$\boxed{\int^x \frac{dt}{t-a} = \ln|x-a| + C}$$

Démonstration ▽

Soit I un intervalle tel que $I \subset]-\infty, a[$. En ce cas, $x - a < 0$ et par conséquent $\ln|x-a| = \ln(a-x)$. En dérivant, nous obtenons,

$$(\ln a - x))' = \frac{-1}{a-x} = \frac{1}{x-a}$$

▲

Exercice : Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $a = \alpha + i\beta$, en notation algébrique ($\beta \neq 0$). Montrez que

$$\int^x \frac{dt}{t-a} = \ln|x-a| + i\text{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

Solution ▽

Par définition de l'intégrale d'une fonction complexe continue, commençons par déterminer les parties réelles et imaginaire de l'intégrande : $\dfrac{1}{t-a} = \dfrac{t-\alpha+i\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$. *Ainsi,*

$$\int^x \frac{dt}{t-a} = \underbrace{\int^x \frac{t-\alpha}{(t-\alpha)^2+\beta^2}\,dt}_{A} + i\underbrace{\int^x \frac{\beta}{(t-\alpha)^2+\beta^2}\,dt}_{B}$$

- *Tout d'abord,* $A = \dfrac{1}{2}\ln\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + C = \ln|x-a| + C$.
- *D'autre part, pour calculer B, effectuons le changement de variable* $u = \dfrac{t-\alpha}{\beta}$. *Il vient*

$$B = \int^{(x-\alpha)/\beta} \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

▲

Proposition 16.24.— Soit $a \in \mathbf{C}$, et $n \in \mathbf{Z}$, avec $n \neq -1$.

$$\boxed{\int^x (t-a)^n \, dt = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C}$$

Démonstration ▽
c'est immédiat par dérivation. ▲

Exercice : Déterminez les primitives : $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t^2-1)(t-2)^2}$.

Solution ▽
Soit $F = \dfrac{1}{(X^2-1)(X-2)^2}$. *La fonction rationnelle associée est continue sur chacun des intervalles* $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,2[$, $]2,+\infty[$ *et y admet donc des primitives. Pour les déterminer, réalisons la DES de* F.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}\boxed{3}$ F *est présentée sous forme irréductible, la partie entière est nulle.* F *admet deux pôles simples* $1, -1$ *et un pôle double* 2.

$\boxed{4}$ *La DES de* F *s'écrit*

$$F(X) = \frac{a}{(X-2)^2} + \frac{b}{(X-2)} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{d}{(X+1)}$$

$\boxed{5}$

$$\begin{array}{lcll}
(X-2)^2F(X) & = & \dfrac{1}{(X^2-1)} & \xrightarrow[x=2]{} a = \dfrac{1}{3} \\
\Big[(X-2)^2F(X)\Big]' & = & -\dfrac{2X}{(X^2-1)^2} & \xrightarrow[x=2]{} b = -\dfrac{4}{9} \\
(X-1)F(X) & = & \dfrac{1}{(X-2)^2(X+1)} & \xrightarrow[x=1]{} c = \dfrac{1}{2} \\
(X+1)F(X) & = & \dfrac{1}{(X-2)^2(X-1)} & \xrightarrow[x=-1]{} d = -\dfrac{1}{18}
\end{array}$$

Ainsi, $\quad F = \dfrac{1}{3(X-2)^2} - \dfrac{4}{9(X-2)} + \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1}{18(X+1)}$. *Par conséquent,*

$$\int^x \frac{dt}{(t^2-1)(t-2)^2} = \frac{-1}{3(x-2)} - \frac{4}{9}\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{18}\ln|x+1| + C$$

▲

1.b Primitives de $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$

On s'intéresse aux primitives réelles de la fraction à coefficients réels $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$.

- Si le dénominateur est scindé sur $\mathbf{R}$, on décompose cette fraction en éléments simples, comme précédemment.
- Cependant, si le discriminant est strictement négatif, les pôles sont complexes. Là encore, il est possible de décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbf{C}$, mais il est plus avantageux d'utiliser un changement de variable est de conclure à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 16.25.— Soit $a \in \mathbf{R}^{+\star}$.

$$\boxed{\int^x \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

Démonstration ▽

Effectuons le changement de variable $\left\| \begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{t}{a} \\ adu & = & dt \end{array} \right.$.

Il vient $\quad \displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2+a^2} = \int^{x/a} \frac{a\,du}{a^2u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int^{x/a}\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\,(x/a)$. ▲

Exercice : $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt$

Solution $\triangledown$

on commence par faire apparaître une forme $\dfrac{u'}{u}$: $\dfrac{t+1}{t^2+t+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2t+1}{t^2+t+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2+t+1}$.

- *A vue* $\displaystyle\int^x \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + C$
- *Pour déterminer la deuxième primitive, on met le dénominateur sous forme canonique :*

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{1}{2}\frac{dt}{t^2+t+1} &= \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4} && \textit{mise du dénominateur sous forme canonique}\\
&= \frac{1}{2}\int^{x+1/2} \frac{du}{u^2+3/4} && \textit{changement de variable affine}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Finalement , $\displaystyle\int^x \frac{t+1}{t^2+t+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$ ▲

1.c Primitives des fractions rationnelles, méthode générale

Soit $\tilde{F}$ une fraction rationnelle à coefficients réels. Pour déterminer ses primitives sur tout intervalle de continuité de $\tilde{F}$, la marche à suivre est la suivante.

$\boxed{1}$ présentez F sous forme irréductible.

$\boxed{2}$ si $F(t)$ peut s'écrire $F(t) = t^{n-1}G(t^n)$, effectuez le changement de variable $u = t^n$.

$\boxed{3}$ décomposez cette dernière fraction en éléments simples dans **C**. S'il y a des pôles complexes (conjugués), groupez les termes $\dfrac{1}{X-a}$ et $\dfrac{1}{X-\bar{a}}$.

$\boxed{4}$ intégrez terme à terme.

Exercice : Déterminez les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \frac{t^2}{1+t^3}\,dt$
2. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1-t^2}$
3. $\displaystyle\int^x \frac{t}{t^3+1}\,dt$
4. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t(t^2+2t+3)}$
5. $\displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{(t^2+t+1)^2}\,dt$

Solution $\triangledown$

1. *le changement de variable* $u = t^3$ *s'impose.*
2. $\dfrac{1}{1-t^2} = -\dfrac{1}{(t-1)(t+1)} = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right].$
3. *Pour la troisième :*

$$\begin{aligned}
\frac{t}{t^3+1} &= \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+j} + \frac{\bar{b}}{t+j^2}\\
&= \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}
\end{aligned}$$

- $a = \dfrac{-1}{3}$ *(en évaluant* $(X+1)F(X)$*)*
- $a+b=0$ *(limite de* $XF(X)$ *d'où* $b = \dfrac{1}{3}$

- *Enfin* $c = \dfrac{1}{3}$ *(en évaluant* $F(X)$ *en* 0*).*

D'où

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{1+t^3} &= -\frac{1}{3}\int^x \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{t^2-t+1} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned}$$

2 Primitives se ramenant à des fractions rationnelles

2.a Primitives des fractions rationnelles en e^t

Méthode : Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. Pour déterminer $\int^x F(e^t)\,dt$, on effectue le changement de variable $u = e^t$.

Exercice : Déterminez les primitives $\int^x \dfrac{dt}{(e^t+1)^2}$ sur $\mathbf{R}$.

Solution ▽

On effectue le changement de variable $u = e^t$, $\dfrac{du}{u} = dt$. *Il vient*

$$\int^x \frac{dt}{(e^t+1)^2} = \int^{e^x} \frac{du}{u\,(1+u)^2}$$

On s'est ainsi ramené au calcul d'une primitive de $F = \dfrac{1}{u\,(1+u)^2}$. *Pour se faire, déterminons la DES de* F.

$$F = \frac{a}{u} + \frac{b}{(1+u)^2} + \frac{c}{1+u}$$

$$\begin{array}{lcll} XF(X) & = & \dfrac{1}{(X+1)^2} & \xrightarrow[x=0]{} a = 1 \\ XF(X) & = & \dfrac{1}{(X+1)^2} & \xrightarrow[x\to+\infty]{} a + c = 0 \\ (X+1)^2F(X) & = & \dfrac{1}{X} & \xrightarrow[x=-1]{} b = -1 \end{array}$$

D'où $F = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1}$. *Il en résulte que*

$$\int^x \frac{dt}{(e^t+1)^2} = \Big[\ln|u|\Big]^{e^x} + \left[\frac{1}{1+u}\right]^{e^x} - \Big[\ln|1+u|\Big]^{e^x} = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$$

▲

2.b Primitives des fractions rationnelles en $\cos t$ et $\sin t$

Méthode : Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. Pour déterminer $\int^x F(\cos t, \sin t)\,dt$, on effectue le changement de variable adéquat :

Théorème 16.26.— Règles de Bioche

Notons $f(t) = F(\cos t, \sin t)$. Pour déterminer $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$

- *si* $f(-t)\,d(-t) = f(t)\,dt$ *, alors on pose* $u = \cos t$
- *si* $f(\pi - t)\,d(\pi - t) = f(t)\,dt$ *, alors on pose* $u = \sin t$
- *si* $f(\pi + t)\,d(\pi + t) = f(t)\,dt$ *, alors on pose* $u = \tan t$

Lorsque l'élément différentiel $f(t)\,dt$ ne vérifie aucune des propriétés d'invariance ci-dessus, vous posez $u = \tan(t/2)$. On a alors

$$\boxed{\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \quad dt = \frac{2\,du}{1+u^2}}$$

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,dt$ sur **R**.

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos t}$ sur $I_k =]-\pi/2+k\pi+;\pi/2+k\pi[$, où $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+\sin^2 t}\,dt$ sur **R**.

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+\cos t}\,dt$ sur $I_k =]-\pi+2k\pi+;\pi+2k\pi[$, où $k \in \mathbf{Z}$.

2.c Primitives des fractions rationnelles en $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$

Méthode : Soit $F \in \mathbf{R}(X)$. Pour déterminer $\int^x F(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\,dt$, on se ramène à une fraction rationnelle de u, au moyen d'un changement de variable.
Remplacez ch par cos, sh par sin et th par tan. Si les règles de Bioche conduisent à poser $u=\cos t$, $u=\sin t$ ou $u=\tan t$, alors posez $u=\operatorname{ch} t$, $u=\operatorname{sh} t$ ou $u=\operatorname{th} t$.
Si le règles de Bioche ne s'appliquent pas, posez $u=e^t$.

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ sur **R**

Exercice : Déterminez $\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+\operatorname{ch} t}$ sur **R**