Chapitre 19

Calcul Matriciel

Sommaire

OBJECTIFS

- ▷ règles de calcul avec les matrices
- ▷ calcul des puissances d'une matrice
- ▷ calcul de l'inverse d'une matrice
- ▷ formulation matricielle des SEL

Introduction

Dans le **Chapitre 21**, nous avons vu qu'un système d'équations linéaires est représenté par une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ de coefficients ainsi que par un second membre $b=(b_i)_{1\leq i\leq n}$. Lors de la résolution d'un tel système, seuls les coefficients du système et son second membre sont modifiés par opérations élémentaires. Dans cette optique, on ne s'intéresse plus qu'au tableau des coefficients, appelé *matrice de n lignes et p colonnes.*
L'objectif de ce chapitre est de développer des opérations sur les matrices particulièrement bien adaptées à la résolution des systèmes.

I Définition et opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

1 Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

1.a Matrice à n lignes et p colonnes

Définition : *Soit $(n,p)\in\mathbf{N}^\star\times\mathbf{N}^\star$ deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice de n lignes et p colonnes** toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$. On la représente sous la forme d'un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$.*

- *L'ensemble des matrices de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*
- *$A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ s'écrit donc sous la forme :*

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p}\\ \dots & \dots & & \dots & & \dots\\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p}\\ \dots & \dots & & \dots & & \dots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix},$$

*Les éléments $a_{i,j}$ s'appellent les **coefficients** de A. Plus précisément, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, le nombre $a_{i,j}\in\mathbf{K}$ est le coefficient de la matrice A à la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne.*

ou $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ voire $A=(a_{i,j})$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les «dimensions»de A.

Vocabulaire :

- *Lorsque $n=p$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des **matrices carrées**, à n lignes et n colonnes.*
- *Lorsque $p=1$, les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ s'appellent les **matrices colonnes**.*
- *Lorsque $n=1$, les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ s'appellent les **matrices lignes**.*

Notation : *L'usage veut que l'on désigne les matrices par des lettres majuscules.*

1.b Exemples

- On note $0_{n,p}$ la **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ qui a tous ses coefficients nuls.

- Si $n \in \mathbf{N}^\star$, on note I_n la matrice **identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: elle est définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ est le symbole de Kronecker. En clair :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple fondamental :

il est possible d'associer naturellement trois matrices à un système d'équations linéaires. Considérons par exemple le système

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + 2y + iz = 7 \\ -2x - 3y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

nous pouvons définir la matrice des *coefficients* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, la matrice colonne *second membre* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et -pourquoi pas- la matrice colonne *inconnue* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & i \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1.c Égalité de deux matrices

Définition : *Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux matrices de* ***mêmes dimensions****. On dit que $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont* ***égales*** *si elles ont les mêmes coefficients , i.e.*

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}}$$

On note $A = B$ cette relation.

Remarque : inutile de préciser que la relation d'égalité est une relation d'équivalence...

2 Addition de deux matrices

Définition : *Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux matrices de* ***mêmes dimensions****. On définit la matrice $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$,* ***somme*** *de A et B par*

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}}$$

Commentaires : en clair, on ajoute coefficients par coefficients !

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 19.1.— $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +\big)$ est un groupe abélien

Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors

- L'addition est **commutative** : $A + B = B + A$
- L'addition est **associative** : $\big(A+B\big) + C = A + \big(B + C\big)$
- La matrice nulle est **élément neutre** : $A + 0 = 0 + A = A$
- A possède un **opposé** : si $-A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dénote la matrice ayant pour coefficients les opposés des coefficients de A, alors $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

3 Multiplication des matrices par un scalaire

Définition : *Etant donnés une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et un* scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, *on définit la matrice $\lambda \cdot A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:*

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda \cdot A)_{i,j} = \lambda . a_{i,j}}$$

Commentaires : en clair, on multiplie tous les coefficients de la matrice A par λ.

Théorème 19.2.— Propriétés de la multiplication par un scalaire
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. La multiplication externe vérifie les propriétés suivantes :

- **Distributivité** par rapport à l'addition des scalaires
$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$$
- **Distributivité** par rapport à l'addition des matrices
$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.$$
- **Associativité mixte**
$$(\lambda \, . \, \mu) \cdot A = \lambda \cdot \big(\mu \cdot A\big).$$
- **1 agit comme élément neutre**
$$1 \cdot A = A \text{ et } (-1) \cdot A = -A$$

Commentaires : on résume l'ensemble de ces propriétés en disant que $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .\big)$ est un espace vectoriel, comme par exemple, l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes d'indéterminée X.

4 Produit de matrices

Reprenons l'exemple fondamental envisagé plus haut

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + 2y + iz = 7 \\ -2x - 3y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & i \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nous souhaitons définir le produit de matrices de sorte que le système (S) puisse être traduit par $A \times X = B$ de façon analogue au cas des équations linéaires à une inconnue.
Pour cela, envisageons d'abord le cas simple du :

4.a Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ une matrice ligne et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ une matrice colonne. On définit le* ***produit*** *$A \times B$ comme le nombre :*

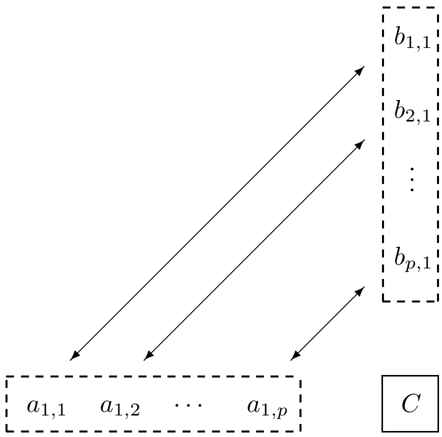
$$\boxed{A \times B = \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} \times b_{k,1} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1}}$$

Disposition pratique :

Pour effectuer ce calcul, il est utile de disposer ce calcul comme indiqué ci-contre.
Notons

$$C = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1}$$

Avec cette présentation, calculer C revient à ajouter les produits des éléments *en face* les uns des autres.



Exemple :

$$\begin{array}{cc} \times & \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} & \boxed{14} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \times & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & i \end{bmatrix} & \boxed{5x+2y+iz} \end{array}$$

Ainsi, l'équation $5x + 2y + iz = 7$ se traduit-elle par

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 7$$

4.b Produit de deux matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ deux matrices. On peut considérer que la matrice A est constituée de n lignes tandis que B est formée de q colonnes. En effectuant les produits de chacune de ces n lignes par ces q colonnes, nous obtenons $n \times q$ produits. Ils forment les $n \times q$ coefficients de la matrice produit $A \times B$. Plus précisément :

Définition : *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on définit la matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par :*

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A \times B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}}$$

Remarque : Pour qu'un produit de matrices soit bien défini, il est nécessaire que les **dimensions** de A et B soient **compatibles** : A doit avoir autant de colonnes que B a de lignes.

$$\underbrace{A \sim (n \quad , \quad \underbrace{p)\,(p}_{\text{compatible}} \quad , \quad q) \sim B}_{A \times B \sim (n,q)}$$

Disposition pratique pour le produit

Pour effectuer ce calcul, il est utile de disposer ce calcul comme indiqué ci-dessous. Notons

$$C = A \times B.$$

Le coefficient $c_{i,j}$ de C qui se trouve à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne est le produit de la $i^{\text{ième}}$ ligne de A par la $j^{\text{ième}}$ colonne de B.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,j} & b_{1,q} \\ & \vdots & \\ \vdots & b_{k,j} & \vdots \\ & \vdots & \\ b_{p,1} & b_{p,j} & b_{p,q} \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,p} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ a_{n,1} & \cdots & & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & c_{1,q} \\ & \boxed{c_{i,j}} & \\ c_{n,1} & & c_{n,q} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice : Effectuez les produits matriciels suivants :

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Calculez $A \times B$ et $B \times A$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution $\triangledown$
1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 26 & -2 \\ 17 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 11 \\ 4 & 15 & 33 & -13 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. En procédant comme ci-dessus, on obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ▲

4.c Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires

À présent, reprenons les données de notre exemple fondamental :

$$(S) \quad \begin{cases} 5x + 2y + iz = 7 \\ -2x - 3y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & i \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Effectuons le produit matriciel $A \times X$. Comme $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbf{C})$ et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$, nous obtenons la matrice colonne $A \times X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & i \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y + iz \\ -2x - 3y + 3z \\ x + 3y - 2z \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le système d'équations linéaires (S) se traduit par la seule équation matricielle :

$$(S) \iff A \times X = B$$

Plus généralement,

Proposition 19.3.— Considérons le système de n équations linéaires à p inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice des coefficients de (S) et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ la matrice colonne *second membre*. Il vient comme précédemment :

$$\boxed{(S) \iff A \times X = B}$$

Commentaires : Autrement dit, le système (S) de n **équations linéaires à** p **inconnues** se ramène à **une équation** matricielle à **une inconnue**.

4.d Propriétés du produit de matrices

Théorème 19.4.— Soit A, B, C des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Pourvu que les produits et sommes ci-dessous soient bien définis, on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors $I_n \times A = A \times I_p = A$.
- $A \times 0 = 0$ et $0 \times A = 0$.

Démonstration $\triangledown$

- Notons $M = A \times (B \times C)$ et $N = (A \times B) \times C$.

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \sum_k a_{i,k}(B \times C)_{k,j} = \sum_k a_{i,k} \sum_\ell b_{k,\ell} c_{\ell,j} \\ &= \sum_\ell \left(\sum_k a_{i,k} b_{k,\ell} \right) c_{\ell,j} = \sum_\ell (A \times B)_{i,\ell} c_{\ell,j} = n_{i,j}. \end{aligned}$$

- découle immédiatement de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbf{K}$.
- trivial
- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, alors

$$(I_n \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j} \quad \text{et} \quad (A \times I_p)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,j} = a_{i,j}$$

$\blacktriangle$

Warning ! certaines propriétés attendues ne figurent pas dans le **Théorème** ci-avant :

1. En général, $A \times B \neq B \times A$, même lorsque les deux produits sont compatibles, comme le montre l'***Exercice*** précédent !
   Retenez que : le produit des matrices n'est pas commutatif !
2. En général, $A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ **ou** $B = 0$, comme le montre aussi l'***Exercice*** précédent.
   Retenez que : il y a des **diviseurs de zéro**
3. En général, $A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C$
   Retenez que : les éléments non nuls ne sont **pas simplifiables** :

5 Transposition

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit la **transposée** de A, et on note ${}^tA$, la matrice élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ définie par :*

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \quad ({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}}$$

Commentaires : en clair, la transposée de A est la matrice qui a pour première colonne la première ligne de A, pour deuxième colonne, la deuxième ligne de A, etc...

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 3 \\ 9 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 19.5.— Propriétés de la transposition
Soit A, B des matrices, pourvu que les additions et multiplication ci-dessous aient un sens, on a :

1.	${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$	**3.**	${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$
2.	${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$	**4.**	${}^t({}^tA) = A$

Démonstration ▽

1. c'est clair
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et ${}^tB \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$, de sorte que le produit ${}^tB \times {}^tA$ est bien défini.
Soit $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]$. Explicitons $({}^tB \times {}^tA)_{i,j}$: par définition du produit de matrices, nous avons :

$$({}^tB \times {}^tA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tA)_{i,k}({}^tB)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{k,i}B_{j,k} = (B \times A)_{j,i} = \left({}^t(A \times B)\right)_{i,j}.$$

▲

6 Conjugaison

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$. On définit la* ***conjuguée*** *de A, et on note $\bar{A}$, la matrice élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ définie par :*

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad (\bar{A})_{i,j} = \bar{a}_{i,j}}$$

Commentaires : en clair la conjuguée de A est la matrice qui a pour coefficients les conjugués des coefficients de A.

Proposition 19.6.— Propriétés de la conjugaison
Soit A, B des matrices à coefficient complexes, pourvu que les additions et multiplication ci-dessous aient un sens, on a :

1.	$\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$	**3.**	$\overline{(\lambda \cdot A)} = \bar{\lambda} \cdot \bar{A}$
2.	$\overline{(A \times B)} = \bar{A} \times \bar{B}$	**4.**	$\overline{(\bar{A})} = A$

Démonstration ▽
Ces propriétés découlent directement des propriétés de la conjugaison des nombres complexes. ▲

Remarque : La conjugaison des matrices est une involution, donc en particulier bijective...

II Matrices carrées

Tout comme pour les systèmes d'équations de n équations à n inconnues comptent les exemples les plus importants (systèmes diagonaux, triangulaires, ou de **Cramer**), les matrices carrées sont d'une importance toute particulière.

1 Exemples importants

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que*

- *A est **scalaire**, s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$.*
- *A est **diagonale**, si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*
- *A est **triangulaire inférieure** , si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i < j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*
- *A est **triangulaire supérieure** , si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0$*

Exemples : Les matrices carrées d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 0 & 48 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 12 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

sont respectivement diagonale, triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Notation : *La matrice diagonale A, sera notée $A = \mathrm{Diag}(12, 8, 7)$*

Exercice : Démontrez que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut s'écrire sous la forme $A = U + D + L$ où U (*resp.* L) est une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) et D est une matrice diagonale. Y a-t-il unicité de cette décomposition ?

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que*

- *A est **symétrique**, si : ${}^tA = A$*
- *A est **antisymétrique**, si : ${}^tA = -A$*

Exemples : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

En explicitant la transposée de A, on obtient par identification des coefficients la :

> **Proposition 19.7.— Caractérisation des matrices symétriques, antisymétriques**
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
> - A est symétrique *si et seulement si* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
> - A est antisymétrique *si et seulement si* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Commentaires : en clair, une matrice carrée A est symétrique si ses coefficients sont *symétriques par rapport à la diagonale.*

Remarque : en particulier, une matrice antisymétrique A a ses éléments diagonaux tous nuls.

Exercice : Montrez que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution $\triangledown$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrons qu'il existe un couple $(S, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, unique tel que

- *A est antinsymétrique*
- *S est symétrique*
- *$M = S + A$.*

- **Analyse :**
  supposons qu'un tel couple (S, A) existe. En transposant l'égalité $M = S + A$, il découle des propriétés de symétries de S et A,

$$\begin{array}{r||lcl} 1\times & M & = & S + A \\ \pm 1\times & {}^tM & = & S - A \end{array}$$

En ajoutant et en retranchant ces deux égalités matricielles, il vient

$$\begin{array}{rcl} S & = & \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \\ A & = & \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \end{array}$$

- **Synthèse :**
  On vérifie en utilisant les propriétés de la transposition des matrices que S et A définies ci-dessus satisfont les trois conditions voulues. ▲

2 Opérations dans $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbf{K})$

Du point de vue de l'addition et de la multiplication par un scalaire, il n'y a rien de particulier à signaler dans le cadre des matrices carrées vu que la situation dans le cas général est déjà on ne peut meilleure. En revanche, en ce qui concerne le produit matriciel, il faut noter que deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont *toujours compatibles* pour le produit et que leur produit est encore une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2, \quad A \times B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$

Autrement dit, le *produit* des matrices induit une *multiplication interne* dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Théorème 19.8.— Opérations sur les matrices carrées
Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$
- $A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)$

Commentaires : en particulier, $\big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times\big)$ est un anneau.

Remarque : Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont tous deux bien définis. Cependant, ils ne sont pas égaux en général : **la multiplication interne dans $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbf{K})$ n'est pas commutative**.

Exercice : On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $A \times B$ et $B \times A$.
2. Que prouve cet exemple ?

Définition : *On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$* ***commutent*** *lorsque $A \times B = B \times A$.*

Exemples : La matrice identité I_n commute avec toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Plus généralement, une matrice scalaire commute avec toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

2.a Produits contre une matrice diagonale

La multiplication par une matrice diagonale est particulièrement simple.
Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- envisageons tout d'abord le cas où $A = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est aussi une matrice diagonale.

En ce cas pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} (A \times D)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} D_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\mu_i \delta_{i,k})\ (\lambda_j \delta_{j,k}) \\ & = & \lambda_j\ \mu_i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\ \delta_{j,k} = \lambda_j\ \mu_i\ \delta_{i,j} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (D \times A)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} D_{i,k} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_i \delta_{i,k})\ (\mu_j \delta_{j,k}) \\ & = & \lambda_i\ \mu_j \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \lambda_i\ \mu_j \delta_{i,j} \end{array}$$

▸Ainsi, $D \times A = A \times D$ est la matrice diagonale. Ses éléments diagonaux sont obtenus en effectuant les produits des éléments diagonaux de A et D :

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \times \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{Diag}(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$$

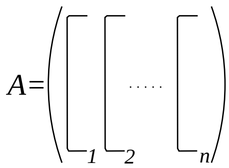
En particulier, deux matrices diagonales commutent !

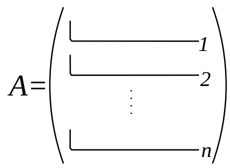
- considérons à présent une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ quelconque.

Notons pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \text{ la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de } A \text{ et } L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \ldots & a_{i,n} \end{pmatrix} \text{ sa } i^{\text{ième}} \text{ ligne,}$$

de sorte que A s'écrive sous la forme d'une ligne de colonnes ou d'une colonne de lignes !





Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

examinons la $j^{\text{ième}}$colonne de $A \times D$

$$\begin{aligned} (A \times D)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \ (\lambda_j \delta_{k,j}) \\ &= \lambda_j \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \ \delta_{k,j} \\ (A \times D)_{i,j} &= \lambda_j \, a_{i,j} \end{aligned}$$

examinons la $i^{\text{ième}}$ligne de $D \times A$

$$\begin{aligned} (D \times A)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_i \delta_{i,k}) \ a_{k,j} \\ &= \lambda_i \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \delta_{i,k} \\ (D \times A)_{i,j} &= \lambda_i \, a_{i,j} \end{aligned}$$

Finalement, les produits contre une matrice diagonale s'interprètent comme des opérations sur les lignes et les colonnes de A :

- la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A \times D$ est obtenue en multipliant par λ_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.
- la $i^{\text{ième}}$ ligne de $D \times A$ est obtenue en multipliant par λ_i la $i^{\text{ième}}$ ligne de A.

En particulier, la multiplication à droite par D agit sur les colonnes de A, tandis que la multiplication à gauche par D agit sur les lignes de A. Il en résulte aisément que $A \times D \neq D \times A$ en général !

3 Puissances d'une matrice carrée

Définition : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit les* ***puissances successives*** *de A par récurrence :*

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \ A^0 = I_n \\ \bullet \ \forall k \in \mathbf{N}, \ A^{k+1} = A \times A^k \end{cases}}$$

Exemple : Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, d'après l'***Exercice*** ci-dessus, les puissances successives de A sont données par

$$A^p = \mathrm{Diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$$

Proposition 19.9.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$,

$$\boxed{A^{p+q} = A^p \times A^q = A^q \times A^p}$$

En particulier, deux puissances d'une même matrice commutent.

Vocabulaire : *une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *est dite* ***nilpotente*** *d'ordre* $p \in \mathbf{N}^\star$ *si* $A^{p-1} \neq 0$ *et* $A^p = 0$.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 3.

Théorème 19.10.— Formule du binôme de Newton
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A \times B = B \times A$. Alors pour tout entier naturel $p \in \mathbf{N}$

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$ telles que $A \times B = B \times A$. La démonstration sera par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$:
Initialisation : lorsque $p = 0$, par définition $(A+B)^0 = I_n$ et $\binom{0}{0} A^0 \times B^0 = I_n$.
Hérédité : Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$$

Calculons $(A+B)^{p+1}$:

$$(A+B)^{p+1} = (A+B) \times (A+B)^p = A \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\ B^{p-k} + B \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}.$$

Comme par hypothèse A et B commutent, $B \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p+1-k}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(A+B)^{p+1} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{k+1} \times B^{p+1-k-1} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} A^k \times B^{p+1-k} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p+1-k} + \binom{p}{0} B^{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) A^k \times B^{p+1-k} + \binom{p}{p} A^{p+1} + \binom{p}{0} B^{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} A^k \times B^{p+1-k} + A^{p+1} + B^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} A^k \times B^{p+1-k}
\end{aligned}$$

Conclusion : par récurrence, nous avons démontré que pour tout entier naturel $p \in \mathbf{N}$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$$

$\blacktriangle$

Théorème 19.11.— Identité géométrique
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ telles que $A \times B = B \times$A et $p \in \mathbf{N}$, alors :

$$\boxed{A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B) \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k}}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ telles que $A \times B = B \times A$ et $p \in \mathbf{N}$,

$$(A - B) \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k} \quad = \quad A \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k} - B \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k}$$

Comme par hypothèse A et B commutent, $B \times \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p+1-k}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
(A - B) \times \sum_{k=0}^{p} A^k \, B^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p} A^{k+1} \times B^{p-k} - \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} A^k \times B^{p+1-k} - \sum_{k=0}^{p} A^k \times B^{p+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A^k \times B^{p+1-k} - \sum_{k=1}^{p} A^k \times B^{p+1-k} + A^{p+1} - B^{p+1} \\
&= A^{p+1} - B^{p+1}.
\end{aligned}$$

▲

Dans le cas particulier où B est l'identité, nous obtenons :

Corollaire 19.12.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $p \in \mathbf{N}$

$$\boxed{A^{p+1} - I_n = (A - I_n) \times \sum_{k=0}^{p} A^k}$$

En pratique : pour calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice A, vous pouvez

- ▸ expliciter ses coefficients à l'aide de relation de récurrence,
- ▸ décomposer A sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente qui commutent puis appliquer la formule du binôme,
- ▸ utiliser une relation polynomiale, comme expliqué au prochain paragraphe.

Exercice : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^{\star}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$$

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A = I_2 + 4J$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Explicitez les puissances successives de J.

3. En déduire A^{100}.

Solution $\triangledown$

1. C'est clair.

2. Calculons J^2 : $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ *. Ainsi,* $J^0 = I_2, J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\forall n \geq 2,\ J^n = 0$.

3. Comme I et J commutent, nous pouvons écrire, avec la formule du binôme,

$$A^{100} = (I + 4J)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} I_2^{100-k} \times (4J)^k = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 4^k \, J^k$$

Comme J^k est nulle dès que $k \geq 2$, il reste

$$A^k = I + 100 \times 4 \times J = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}$$

▲

4 Polynômes de matrices

Nous avons observé que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est stable pour la multiplication par les scalaires $\alpha \in \mathbf{K}$, et nous venons de voir que l'on peut définir des puissances d'une matrice. Ceci permet de définir les polynômes de matrices :

Définition : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un poynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$:*

$$P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On définit pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$\boxed{P(A) = a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \ I_n}$$

Commentaires : notez bien que dans la définition de polynôme de matrice, la constante a_0, a été remplacée par la matrice *scalaire* $a_0 I_n$. C'est tout à fait cohérent avec la définition de $A^0 = I_n$, n'est-ce pas ?

Remarque : Les polynômes de matrices jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire comme nous le verrons bientôt.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Explicitons $P(A)$, lorsque $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

Commençons par calculer A^2 et A^3 :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme $P(A) = A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$, il en résulte que

$$P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vocabulaire : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est un* ***polynôme annulateur de*** *A si*

$$P(A) = 0$$

Exercice : calcul des puissances d'une matrice

On considère le polynôme $P = X^2 + X - 2$.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrez que $P(A) = 0$.

2. Soit $n \geq 2$. Déterminez le reste R dans la division euclidienne de X^n par P.

3. En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, l'expression de la puissance n ième de A.

Solution ▽

1. *On a* $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$ *D'où l'on tire* $P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. D'après la division euclidienne de X^n par P, il existe un couple (Q, R) de polynômes, uniques tels que*

$$X^n = P(X)Q(X) + R(X) \text{ et } d^\circ R < 2.$$

Ecrivons $R = aX + b$ et évaluons l'égalité polynomiale ci-dessus en 1 et -2, il vient

$$\begin{cases} 1 &= a + b \\ (-2)^n &= -2a + b \end{cases}$$

D'où l'on tire $\begin{cases} a &= \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big) \\ b &= \frac{1}{3}\big(2 + (-2)^n\big) \end{cases}$ *. Ainsi,*

$$R = \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big)\ X + \frac{1}{3}\big(2 + (-2)^n\big)$$

3. *Soit $n \geq 2$, on a $X^n = P(X)Q(X) + \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big)\ X + \frac{1}{3}\big(2 + (-2)^n\big)$. Appliquons cette égalité polynomiale à A. Comme $P(A) = 0$, il en résulte*

$$\begin{aligned} A^n &= P(A) \times Q(A) + \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big)\ A + \frac{1}{3}\big(2 + (-2)^n\big)\ I_2 \\ &= \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big)\ A + \frac{1}{3}\big(2 + (-2)^n\big)\ I_2. \end{aligned}$$

On vérifie alors que cette egalité est encore valide pour $n \in \{0, 1\}$. ▲

III Matrices inversibles

Ainsi que nous l'avons établi, $\big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times\big)$ est un anneau. Comme dans tout anneau, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ forme un groupe pour la multiplication (cf **Proposition** 14.22).

1 Définition de $GL_n(\mathbf{K})$

Définition-Proposition.— *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite* ***inversible*** *s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :*

$$\boxed{A \times B = I_n \text{ et } B \times A = I_n}$$

*Si elle existe, B est unique. On l'appelle l'****inverse*** *de A, et on la note $B = A^{-1}$.*

Notation : *$GL_n(\mathbf{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles.*

Proposition 19.13.— $\big(GL_n(\mathbf{K}), \times\big)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire d'ordre** n.

Démonstration ▽

$GL_n(\mathbf{K}) = \big(\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\big)^\star$. Le résultat découle alors de la **Proposition** 14.22. ▲

Exemples :

- la matrice identité I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$
- une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est inversible *si et seulement si* ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, $D^{-1} = \mathrm{Diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)$.
- soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration ▽

Il s'agit de démontrer l'unicité de l'inverse. Pour ce faire, considérons $(B, B') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $A \times B = A \times B' = B \times A = B' \times A = I_n$ et montrons que $B = B'$. Par associativité du produit matriciel, il vient :

$$\begin{aligned} B \times A = I_n &\Rightarrow (B \times A) \times B' = I_n \times B' \\ &\Rightarrow B = B'. \end{aligned}$$

▲

2 Propriétés des matrices inversibles

Théorème 19.14.— Règles de calculs dans $GL_n(\mathbf{K})$
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

- **Si** A est inversible, **alors** A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- **Si** A est inversible **alors** ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- **Si** A et B sont inversibles, **alors** $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
- **Si** A est inversible, **alors**
  B est inversible *si et seulement si* $A \times B$ est inversible.
  B est inversible *si et seulement si* $B \times A$ est inversible.
- **Si** A est inversible, **alors** A est simplifiable, c'est-à-dire :

$$\forall (B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad (A \times B = A \times C \iff B = C)$$
$$\forall (B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad (B \times A = C \times A \iff B = C)$$

Commentaires : Mise à part la compatibilité avec la transposition, ces propriétés découlent de la structure de groupe.

Démonstration $\triangledown$

- Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, alors par définition $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$. Relisons ce que nous venons d'écrire :
  A^{-1} est inversible et son inverse est A !
- Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, alors par définition $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$. *Transposons* ces deux égalités. Comme la matrice I_n est symétrique[1] il vient :
$$ {}^t(A \times A^{-1}) = I_n \quad \text{et} \quad {}^t(A^{-1} \times A) = I_n$$
  La transposition étant *contravariante*, j'en déduis que
$$ {}^t(A^{-1}) \times {}^tA = I_n \quad \text{et} \quad {}^tA \times {}^t(A^{-1}) = I_n$$
  Ainsi, ${}^tA$ est inversible et son inverse est ${}^t(A^{-1})$.
- Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbf{K})$. Montrons que $A \times B$ est inversible et que son inverse est donné par $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$. Pour cela, il suffit de calculer les produits $(A \times B) \times \left(B^{-1} \times A^{-1}\right)$ et $\left(B^{-1} \times A^{-1}\right) \times (A \times B)$. Il vient par associativité du produit des matrices :
$$(A \times B) \times \left(B^{-1} \times A^{-1}\right) = A \times \underbrace{(B \times B^{-1})}_{I_n} \times A^{-1} = A \times A^{-1} = I_n$$
  De même
$$\left(B^{-1} \times A^{-1}\right) \times (A \times B) = B^{-1} \times \underbrace{(A^{-1} \times A)}_{I_n} \times B = B^{-1} \times B = I_n$$
- D'après le troisième ■, les deux conditions sont clairement nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes :
  Supposons par exemple que A et $A \times B$ soient inversibles. Alors $B = A^{-1} \times (A \times B)$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles.
  De même si A et $B \times A$ sont inversibles, alors $B = (B \times A) \times A^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
- Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$. Supposons que $A \times B = A \times C$. En multipliant les deux membres de cette égalité par A^{-1} à gauche, on en déduit que $B = C$.
  L'autre implication est obtenue de la même manière en multipliant les deux membres de l'égalité par A^{-1} à droite cette fois. ▲

Exercice : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$. On suppose que A et B sont non nulles.
Montrez que si $A \times B = 0$, alors A n'est pas inversible et B n'est pas inversible.

[1] *auto-transposée !!*

Exercice : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $A^p = 0$.

1. Calculez $(I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

2. En déduire que $I_n - A$ est inversible et calculez son inverse.

Solution ▽

Comme A et I_n commutent, nous pouvons appliquer l'identité géométrique, il vient :

$$(I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I_n - A^p$$

Comme par hypothèse A est nilpotente d'ordre p, la matrice A^p est nulle. Ainsi :

$$(I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) \times (I_n - A) = I_n$$

ce qui prouve que la matrice $I_n - A$ est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$. ▲

3 Lien fondamental avec les systèmes de Cramer

Le résultat suivant est **fondamental** dans notre approche. Notez que ce théorème repose sur le **Théorème** 18.14 :

Théorème 19.15.— Lien avec les systèmes de Cramer
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On note (S) le système

$$(S) \qquad A \times X = B$$

(S) est un système de **Cramer** *si et seulement si* A est inversible.

Dans ce cas, l'unique solution de (S) est $A^{-1} \times B$.

En pratique : ce théorème est très utile pour résoudre les systèmes d'équations linéaires, lorsque vous connaissez la matrice des coefficients, mais aussi pour calculer l'inverse d'une matrice comme nous le verrons au prochain paragraphe.

Démonstration ▽

La condition est suffisante :

Supposons la matrice A inversible. En ce cas

$$\begin{aligned}(S) \quad &\iff \quad A \times X = B \\ &\iff \quad A^{-1} \times (A \times X) = A^{-1} \times B \\ &\iff \quad (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B \\ &\iff \quad X = A^{-1} \times B.\end{aligned}$$

La condition est nécessaire :

Supposons que (S) soit de **Cramer**. D'après le **Théorème** 18.14, nous savons que :
– Pour tout 2^{d} membre $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $A \times X = C$ possède au moins une solution,
– Pour tout 2^{d} membre $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $A \times X = C$ possède au plus une solution.
– Pour tout 2^{d} membre $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $A \times X = C$ possède une unique solution.

- Montrons qu'il existe $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A \times \tilde{A} = I_n$.

Pour cela considérons les colonnes *second membre* $C_1, C_2, \dots, C_n$ définis par :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad C_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le **Théorème** 18.14, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le système

$$(S_j) \qquad A \times X = C_j$$

possède au moins une solution : notons $\tilde{A}_j$ cette solution.
Les matrices colonnes $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ définissent une matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = (\tilde{A}_{i,j})$. Montrons que $A \times \tilde{A} = I_n$:
Par construction du produit matriciel, la $j^{\text{ième}}$ colonne du produit $A \times \tilde{A}$ est égale au produit $A \times \tilde{A}_j$. Ainsi,

$$A \times \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

- Montrons que $\tilde{A}$ vérifie aussi $\tilde{A} \times A = I_n$.

Remarquons tout d'abord que pour tout second membre C, le système $A \times X = C$ admet pour solution (unique, par hypothèse) $\tilde{A} \times C$: en effet, $A \times (\tilde{A} \times C) = (A \times \tilde{A}) \times C = C$. Ainsi, $\tilde{A} \times C$ est solution de $A \times X = C$.
A présent, notons $A_1, \dots, A_n$ les n colonnes de A et considérons, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le système

$$(S_j) \qquad A \times X = A_j$$

D'après ce qui précède, $\tilde{A} \times A_j$ est solution de (S_j). Or, la matrice colonne C_j est clairement solution de (S_j). Par unicité de la solution d'un système de **Cramer**, j'en déduis que $\tilde{A} \times A_j = C_j$. Comme les produits $A \times A_j$ sont les colonnes de la matrice produit $\tilde{A} \times A$, il en résulte finalement que $\tilde{A} \times A = I_n$.

▲

Comme nous avons déjà bien travaillé sur les systèmes d'équations linéaires, ce **Théorème** permet de récupérer sans efforts -supplémentaires- des propriétés importantes :

Théorème 19.16.— Inversibilité des matrices triangulaires
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire[2]. Alors

T est inversible *si et seulement si* les coefficients diagonaux de T sont **tous non nuls**.

Démonstration ▽
Découle du **Théorème** 18.4 grâce au **Théorème** 19.15. ▲

Remarque : Ce critère s'applique en particulier aux matrices diagonales.

Corollaire 19.17.— Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible *si et seulement si* $a \times d - b \times c \neq 0$.
Dans ce cas,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

[2]inférieure ou supérieure, peu importe !

Vocabulaire : *la quantité $a \times d - b \times c$ qui permet donc de savoir si la matrice A est inversible ou pas est appelée le* ***déterminant*** *de la matrice A. On note $\mathsf{Det}\, A = a - bc$. Nous verrons ultérieurement que ce corollaire se généralise aux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbf{N}^\star$.*

Théorème 19.18.— Inversibilité à gauche ou à droite
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors

A est inversible	*si et seulement si*	il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A \times B = I_n$
	si et seulement si	il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $B \times A = I_n$.

Dans ce cas $A^{-1} = B$.

Commentaires : pour comprendre l'intérêt de ce résultat, il faut se rappeler que la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est pas commutative. Ce résultat -équivalent au **Théorème** 18.14- est donc *highly non trivial* !

Remarque : Par unicité de l'inverse de A, il est clair que dans chacun des cas du **Théorème** 19.18, $A^{-1} = B$.

Démonstration $\triangledown$
• Les conditions sont clairement nécessaires.

• Supposons qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A \times B = I_n$. Montrons que A est inversible.

D'après le **Théorème** 19.15, il suffit de montrer que le système $(S) \qquad A \times X = 0 \qquad$ est de **Cramer**. D'après le **Théorème** 18.14 cela revient à prouver que

pour tout second membre $c \in \mathbf{K}^n$, le système (S_c) admet au moins une solution.

Soit donc $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbf{K}^n$ fixé. On montre que (S_c) possède (au moins) une solution. Notons C la matrice colonne de coefficients $(c_1, \ldots, c_n)$, de sorte que le système (S_c) puisse être traduit en notation matricielle par :

$$(S_c) \qquad\qquad A \times X = C$$

Comme $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = I_n \times C = C$, $B \times C$ est solution de (S_c). Ainsi, pour tout second membre $c \in \mathbf{K}^n$, le système (S_c) admet au moins une solution. Par conséquent, (S) est de **Cramer** et donc A est inversible.
• Supposons qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $B \times A = I_n$. Montrons que A est inversible.

D'après le **Théorème** 19.15, il suffit de montrer que le sytème $(S_o) \qquad A \times X = 0 \qquad$ est de **Cramer**. Comme $0 \in \mathbf{K}^n$ est solution de (S_o), il s'agit de montrer -par définition des systèmes de **Cramer**- que 0 est l'unique solution de (S_o). Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ une solution de (S_o). Alors

$$X_0 = (B \times A) \times X_0 = B \times (A \times X_0) = B \times 0 = 0$$

Ainsi, 0 est l'unique solution de (S_o). ▲

IV Détermination pratique de l'inverse

Dans cette section, nous présentons **trois méthodes** pratiques **pour déterminer l'inverse** d'une matrice A.
- le point de vue **système d'équations linéaires**
- la méthode de **Gauss-Jordan**
- l'utilisation de **polynômes annulateurs** de A.

Chacune de ces méthodes, permet de savoir si A est inversible ou pas, et donne, le cas échéant, une formule pour l'inverse.

1 Point de vue systèmes d'équations linéaires

D'après le **Théorème** 19.15, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible *si et seulement si* le système

$$A \times X = B$$

est de **Cramer**. De plus, si tel est le cas, nous avons vu que l'unique solution de ce système est $A^{-1} \times B$.
Cette simple remarque conduit à une première façon de calculer l'inverse d'une matrice :

1.a Principe de la méthode SEL :

Notons $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et résolvons le système de n équations à n inconnues et n paramètres

$$(S) \qquad\qquad A \times X = Y$$

On échelonne (S) par l'algorithme de **Gauss**. Deux cas se présentent :

- si (S) n'est pas de **Cramer** : la matrice A n'est pas inversible.
- si (S) est de **Cramer**, nous obtenons une unique solution, par conséquent, la matrice A est inversible. De plus,
  - La résolution du système de n équations à n inconnues et n paramètres donne une unique solution qui s'exprime en fonction des paramètres $(y_1, \ldots, y_n)$:
  $$(S) \iff X = A^{-1} \times Y$$
  - On détermine l'inverse de A par identification.

1.b Mise en œuvre de la méthode SEL

Appliquons cette première méthode pour calculer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ Résolvons le système $(S) \quad A \times X = Y$.

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = y_1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = y_2 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = y_3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = y_2 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = y_1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = y_3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = y_2 \\ & +5x_2 & -4x_3 & = y_1 - 3y_2 \\ & & -x_3 & = y_3 - 2y_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lrrr} x_1 = & 1/5\ y_1 & & +1/5\ y_3 \\ x_2 = & 1/5\ y_1 & +y_2 & -4/5\ y_3 \\ x_3 = & & 2y_2 & -y_3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

✓ Pour tout second membre $Y = (y_1, y_2, y_3)$, le système admet une unique solution : le système est de **Cramer** et par conséquent A est inversible. Cette solution s'exprime en fonction des paramètres (y_1, y_2, y_3) :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 1/5\ y_1 & & +1/5\ y_3 & = x_1 \\ 1/5\ y_1 & +y_2 & -4/5\ y_3 & = x_2 \\ & 2y_2 & -y_3 & = x_3 \end{array} \right.$$

✓ Il ne reste plus qu'à *lire* les coefficients de la matrice A^{-1} : j'obtiens

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

de sorte que $X = A^{-1} \times Y$.

2 Algorithme de Gauss-Jordan

D'après le **Théorème** 19.18, pour qu'une matrice A soit inversible il est[3] suffisant de trouver une matrice L telle que

$$L \times A = I_n$$

La méthode de **Gauss-Jordan** est calquée sur la méthode de **Gauss** pour la résolution des systèmes. L'idée est donc de trianguler la matrice A, puis de remonter...

2.a Opérations élémentaires sur les lignes

Les outils de base pour cette deuxième méthode sont les **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice A.

Ces opérations consistent à

- échanger deux lignes de la matrice A $\qquad L_i \leftrightarrow L_j$
- remplacer une ligne de A par un multiple - non nul- de cette ligne $\qquad L_i \leftarrow \alpha L_i$
- ajouter à la ligne L_i un multiple de L_j $\qquad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Chacune de ces opérations élémentaires sur les lignes, correspond en fait à la multiplication par la gauche de la matrice A par une matrice -dite élémentaire- L :

• Echange de lignes

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On définit la matrice de *permutation* $\Pi_{i,j}$ comme étant la matrice obtenue à partir de I_n en échangeant les lignes i et j :

$$\Pi_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow\ i^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow\ j^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

> **Lemme.—** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$
>
> **1.** $\Pi_{i,j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i ième et j ième lignes de A.
>
> **2.** $A \times \Pi_{i,j}$ est la matrice obtenue en permutant les i ième et j ième colonnes de A.
>
> En particulier, $\Pi_{i,j} \times \Pi_{i,j} = I_n$, de sorte que $\Pi_{i,j}$ est inversible et $\Pi_{i,j}^{-1} = \Pi_{i,j}$

Démonstration ▽

Cette propriété se déduit des règles de la multiplication des matrices par une matrice diagonale. ▲

• Multiplication par un scalaire non nul

Soit $\alpha \in \mathbf{K}^\star$, on définit la matrice $\Delta_i(\alpha)$ de *multiplication de la $i^{\text{ième}}$ ligne par α* comme la matrice obtenue à partir de I_n en multipliant la $i^{\text{ième}}$ ligne par α :

---

[3] nécessaire et

$$\Delta_i(\alpha) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Lemme.— Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

1. $\Delta_i(\alpha) \times A$ est la matrice obtenue en multipliant la i $^{\text{ième}}$ ligne de A par α.

2. $A \times \Delta_i(\alpha)$ est la matrice obtenue en multipliant la i $^{\text{ième}}$ colonne de A par α.

En particulier, $\Delta_i(\alpha) \times \Delta_i(\alpha^{-1}) = I_n$. Ainsi, $\Delta_i(\alpha)$ est inversible et $\Delta_i(\alpha)^{-1} = \Delta_i(\alpha^{-1})$.

Démonstration ▽

Cette propriété se déduit des règles de la multiplication des matrices par une matrice diagonale. ▲

• Addition d'un multiple d'une autre ligne

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on définit la matrice $\Gamma_{i,j}(\lambda)$ d'*addition de λ fois la $j^{\text{ième}}$ ligne à la $i^{\text{ème}}$* comme étant la matrice obtenue à partir de I_n en rajoutant à la $i^{\text{ième}}$ ligne la multiplication de la $j^{\text{ième}}$ ligne par λ :

$$\Gamma_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow j^{\text{ième}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Lemme.— Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

1. $\Gamma_{i,j}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue en rajoutant à la i $^{\text{ième}}$ ligne de A, λ fois la j $^{\text{ième}}$.

2. $A \times \Gamma_{i,j}(\lambda)$ est la matrice obtenue en rajoutant à la i $^{\text{ième}}$ colonne de A, λ fois la j $^{\text{ième}}$.

La matrice $\Gamma_{i,j}(\lambda)$ étant triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible.

Démonstration ▽

Cette propriété se déduit des règles de la multiplication des matrices par une matrice diagonale. ▲

2.b Principe de la méthode de Gauss-Jordan

Il s'agit de transformer par opérations élémentaires sur les lignes, la matrice A en l'identité :

$$L_p \times L_{p-1} \times \cdots \times L_1 \times A = I_n$$

D'après le **Théorème** 19.18, il en résulte que A est inversible et que $A^{-1} = L_p \times L_{p-1} \times \cdots \times L_1$.
Pour parvenir à l'identité, on distingue deux étapes, comme pour la résolution des systèmes :

✓ **Elimination**

Par une suite $L_1, L_2, \ldots, L_p$ d'opérations élémentaires sur les **lignes** de A, on peut toujours se ramener à une matrice **triangulaire**. Ces opérations correspondent à des multiplications à **gauche** par des matrices élémentaires :

$$L_p \times L_{p-1} \times \cdots \times L_1 \times A = T$$

⇝ s'**il y a des zéros sur la diagonale** de T, cette matrice n'est pas inversible. Par conséquent[4], la matrice A n'est pas inversible.

⇝ si T a **tous ses coefficients diagonaux non nuls**, elle est inversible. Par conséquent[5] la matrice A est inversible.

✓ **Remontée**

Il s'agit toujours par opérations sur les lignes de remonter vers I_n. Pour cela, on multiplie la dernière ligne par un scalaire pour que le coefficient diagonal soit 1 puis on élimine par combinaison linéaire tous les coefficients de la dernière colonne. On recommence cette opération pour la $(n-1)^{\text{ième}}$ colonne, puis pour la $(n-2)^{\text{ième}}$, *etc.*

2.c Mise en œuvre de la méthode de Gauss-Jordan

Appliquons cette deuxième méthode pour calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{lcc}
 & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
L_2 \leftrightarrow L_2 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\[2ex]
L_3 \leftarrow -L_3 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\[2ex]
L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\[2ex]
L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

3 Utilisation d'une relation polynomiale

3.a Principe de la méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice et $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$.

$$P = a_p X^p + \cdots + a_1 X + a_0$$

On suppose que $P(A) = 0_n$. Cette relation polynomiale permet dans les *bons cas* de calculer l'inverse de A :

[4] d'après les propriétés des matrices inversibles

[5] d'après le **Théorème** 19.18

- **Les bons cas :** on suppose que $a_0 = P(0) \neq 0$.

  Partons de la relation
  $$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p = 0.$$
  Comme par hypothèse $a_0 \neq 0$, nous en déduisons que
  $$I_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{p} a_k A^k = A \times \left(-\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k\right)$$
  Ainsi, d'après le **Théorème** 19.18, A est inversible et
  $$A^{-1} = -\sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} A^k$$

- **Les autres cas :** n'arrivent jamais à notre niveau...

  Cependant, par souci de complétude et pour le lecteur avide de savoir, voici comment on pourrait procéder : Si $a_0 = 0$, divisons P par X^k où k est l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P. Plus précisément, d'après la **caractérisation des racines multiples**, P se factorise sous la forme $P = X^k \times Q$ où $Q(0) \neq 0$, de sorte que
  $$0 = A^k \times Q(A)$$
  Deux cas présentent :
  - $Q(A) = 0$. En ce cas, comme $Q(0) \neq 0$, nous sommes ramenés au **bon cas**.
  - $Q(A) \neq 0$. En ce cas A^k est un diviseur de zéro, et par conséquent A n'est pas inversible.

3.b Mise en œuvre de la méthode utilisation d'une relation polynomiale

Appliquons cette méthode pour calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

✓ **Un polynôme annulateur de A :**

Considérons le polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ défini par :
$$P = X^3 - 3X^2 + X - 5.$$
Montrons que $P(A) = 0$.

Calculons les puissances successives de A :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 29 & 16 & -5 \\ 11 & 9 & -4 \\ 16 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$
On vérifie alors que $P(A) = 0$. Ainsi, A satisfait la relation polynomiale :
$$\boxed{A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0}$$
Comme $P(0) \neq 0$, A est inversible.

✓ **Calcul de l'inverse de A**

De l'égalité $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0$, je tire
$$A \times \left(A^2 - 3A + I_3\right) = 5I_3$$
D'où je déduis finalement :
$$A^{-1} = \frac{1}{5}\left(A^2 - 3A + I_3\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Vous démontrerez l'an prochain que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ possède des polynômes annulateurs.