PROGRAMME DE COLLE S15

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

SUITES NUMÉRIQUES (II)

▪▪▪ Suites de référence

Proposition*.— Trois relations de comparaison —. Soit u et v des suites de nombres réels. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0 , $v_n \neq 0$. Alors

1. $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *si et seulement si* $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.
2. $u_n = o(v_n)$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n = 0$.
3. $u_n \sim v_n$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1$.

Théorème*.— Croissances et croissances comparées des suites de référence —. Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{R}^3$ tels que $0<\alpha<\beta$.

1. La suite $(\sqrt[n]{\alpha})$ est convergente de limite 1.
2. La suite $((\ln n)^\alpha)_{n\geq 1}$ est divergente vers $+\infty$.
3. La suite (n^α) est divergente vers $+\infty$.
4. La suite $(e^{\alpha n})$ est divergente vers $+\infty$.
5. La suite $(n!)$ est divergente vers $+\infty$.
6. La suite (n^n) est divergente vers $+\infty$.

De plus,

1.	$(\ln n)^\alpha = o\big((\ln n)^\beta\big)$	**3.**	$n^\alpha = o\big(n^\beta\big)$	**5.**	$e^{\alpha n} = o\big(e^{\beta n}\big)$
2.	$(\ln n)^\beta = o\big(n^\alpha\big)$	**4.**	$n^\alpha = o\big(e^{\gamma n}\big)$	**6.**	$e^{\alpha n} = o\big(n!\big)$

Théorème*.— Équivalents usuels —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

- $\sin u_n \sim u_n$
- $1-\cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
- $\tan u_n \sim u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.

Théorème*.— Formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$$

▪▪▪ Suites classiques

Théorème*.— Suite géométrique.— Soit $a \in \mathbf{R}^\star$ et $q \in \mathbf{R}$ fixés.

Une suite géométrique de raison $q \in \mathbf{R}$ est convergente *si et seulement si* $|q|<1$ ou $q=1$.

Soit u la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. On définit une nouvelle suite, notée S en posant $\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, appelée **suite des sommes partielles** des termes de la suite u. Si $(u_n) = (aq^n)$ alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = (n+1)a \text{ si } q=1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ S_n = a\tfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ sinon}$$

Proposition.— Suite des sommes partielles.— La suite des sommes partielles S d'une suite géométrique u de raison q est convergente *si et seulement si* $|q|<1$. En ce cas :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}}$$

Théorème.— Suite arithmético-géométrique.— Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tel que $a\neq 1$ et $b\neq 0$
Soit u la suite de premier terme $u_0\in\mathbf{R}$ définie par la relation de récurrence

$$\boxed{u_{n+1}=au_n+b}$$

Soit r la solution de l'équation $r=ar+b$. La suite $v=u-r$ est géométrique de raison a.

Théorème*.— Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^\star\times\mathbf{R}^\star$ et u une suite de nombres *réels* définie par la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n}$$

Notons Δ le discriminant de l'**équation caractéristique** : $r^2-ar-b=0$.

- Si $\Delta>0$: l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, notées r_1, r_2.
  $$\exists\,!(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \text{ tel que } \forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$$
- Si $\Delta=0$: l'éq. caractéristique possède une racine réelle double, notée r_0
  $$\exists\,!(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \text{ tel que } \forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\lambda r_0^n+n\,\mu r_0^n$$
- Si $\Delta<0$: l'éq. car. possède deux racines complexes conjuguées distinctes, notées $r=\rho e^{\pm i\theta}$
  $$\exists\,!(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 \text{ tel que } \forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\rho^n(\lambda\cos n\theta+\mu\sin n\theta)$$

▪▪▪ Suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$

Proposition.— Étant donné une fonction $f:I\to I$, définie sur un intervalle I à valeurs dans ce même intervalle I, et $a\in I$, il existe une suite $(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, unique telle que

$$\boxed{(1)\qquad \begin{cases}\bullet\quad u_0=a\\ \bullet\quad \forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}}$$

De plus, $(u_n)\in I^{\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de I.

Proposition.— Soit $f:I\to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (1) et $h:x\mapsto h(x)=f(x)-x$.

- **Si** h est positive sur I, **alors** (u_n) est croissante.
- **Si** h est négative sur I, **alors** (u_n) est décroissante.

Théorème.— cas d'une itératrice monotone .— Soit $f:I\to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (1). On suppose que f est monotone.

- **Si** f est croissante sur I **alors** (u_n) est monotone.
- **Si** f est décroissante sur I **alors** (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.

Illustration : quatre situations élémentaires

Théorème.— cas d'une itératrice continue.— Soit $f:I\to I$ une fonction **continue** sur un intervalle stable I et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (1).

> **Si** la suite u est convergente vers $\ell\in I$, **alors** sa limite ℓ est une solution dans I de l'équation : $f(x)=x$.

Théorème.— cas d'une itératrice strictement contractante.— Soit $f:I\to I$ une fonction lipschitzienne de constante $k\in]0,1[$, ℓ un point fixe de f et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par (1). Alors $\forall n\in\mathbf{N},\quad \left|u_{n+1}-\ell\right|\le k\left|u_n-\ell\right|$.
Par conséquent, la suite (u_n) est convergente de limite ℓ et

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\quad \left|u_n-\ell\right|\le k^n\left|u_0-\ell\right|}$$

Savoir-faire : utiliser l'**inégalité des accroissements finis** pour montrer que f est k-lipschitzienne.

▪▪▪ Suites définies implicitement

Savoir-faire : utiliser le **Théorème de la bijection** pour étudier des suites définies implicitement, c'est-à-dire des suites dont le terme général est solution d'une équation :

$$(E_n)\qquad\qquad f_n(x)=0$$