Chapitre 7

Nombres réels et suites numériques

Sommaire

OBJECTIFS

À la fin du chapitre vous devrez connaître **parfaitement** les théorèmes d'existence de limite :

- ▷ existence de limite par opérations algébriques
- ▷ existence de limite par comparaison et encadrement
- ▷ existence de limite pour les suites monotones, les suites adjacentes

Quelques résultats ≪topologiques ≫complètent cette étude, il s'agit

- ▷ de la propriété de la borne supérieure
- ▷ du théorème de Bolzano-Weierstraß
- ▷ du théorème des segments emboîtés et la construction de suites adjacentes par dichotomie.

I R est un corps totalement ordonné

1 Parties minorées, majorées, bornées

Définition : *Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ une partie de $\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$ un réel.*

• *x est un **majorant** de A dans* $\mathbf{R}$	*si*	$\forall a \in A, \quad a \leq x$
• *x est un **minorant** de A dans* $\mathbf{R}$	*si*	$\forall a \in A, \quad a \geq x$
• *x est un **plus grand élément** de A*	*si*	*x est un élément et un majorant de A*
• *x est un **plus petit élément** de A*	*si*	*x est un élément et un minorant de A*

Commentaires : quelle est la différence entre majorant et plus grand élément ? Si α est plus grand élément de A, alors c'est un majorant de A, mais en plus $\alpha \in A$.

Vocabulaire : *On dit que*

- *A est une **partie majorée** de* $\mathbf{R}$ *si* $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall a \in A, a \leq M$.
- *A est une **partie minorée** de* $\mathbf{R}$ *si* $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall a \in A, a \geq m$.
- *A est une **partie bornée** de* $\mathbf{R}$ *si* $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall a \in A, |a| \leq M$.

Notation : *L'ensemble des majorants (resp des minorants) de A dans* $\mathbf{R}$ *est noté* $\mathsf{Maj}_{\mathbf{R}}(A)$ *(resp.* $\mathsf{Min}_{\mathbf{R}}(A)$*).*

Exemple :

1. On considère la partie $A = [1, 2[\cup[3, 4[$. Quel est l'ensemble des minorants de A dans $\mathbf{R}$, l'ensemble de ses majorants. A possède-t-il un plus petit élément, un plus grand élément ?

2. Mêmes questions avec $A = \mathbf{N}$.

Proposition 7.1.— Unicité du plus grand élément —. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$.
Si A possède un plus grand élément (*resp.* un plus petit élément) α, alors il est unique.
On note dans ce cas $\alpha = \max(A)$ (*resp.* $\alpha = \min(A)$).

Démonstration ▽

Montrons l'unicité du plus grand élément. Soit (α, β) un couple de plus grands éléments de A. Alors par définition $\alpha, \beta \in A$. De plus, comme α est un majorant de A, $\forall a \in A, a \leq \alpha$. Donc en particulier, $\alpha \geq \beta$. β étant aussi un majorant de A, $\beta \geq \alpha$. Par antisymétrie de $\leq$ nous en déduisons que $\alpha = \beta$. ▲

2 Borne supérieure

2.a Définition

Dans N ou dans Z, une partie majorée non vide possède toujours un plus grand élément. Dans R la situation est un peu plus compliquée comme le montre l'exemple de l'intervalle $A = [0, 1[$ **ci-dessus.**

Exercice : On considère la partie $A = [0, 1[$.

1. Quel est l'ensemble des minorants de A dans $\mathbf{R}$, l'ensemble de ses majorants ?

2. A possède-t-il un plus petit élément, un plus grand élément ?

3. $\mathsf{Maj}\,A$ et $\mathsf{Min}\,A$ possèdent-ils un plus petit élément, un plus grand élément ?

Définition : Borne supérieure et borne inférieure d'une partie —. *Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$.*

- *Si A possède un plus petit majorant M, alors M est appelé la* ***borne supérieure*** *de A. On note*

$$\sup A = \min(\mathsf{Maj}\,(A))$$

- *Si A possède un plus grand minorant m, alors m est appelé la* ***borne inférieure*** *de A. On note*

$$\inf A = \max(\mathsf{Min}\,(A))$$

Exemple : Dans l'exemple de l'intervalle $A = [0, 1[$, nous avons $\sup A = 1$.

Exercice : Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide de $\mathbf{R}$. Montrez que si A possède un plus grand (resp. petit) élément α, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) $\alpha = \sup A$ (resp. $\alpha = \inf A$).
Que pensez-vous de la réciproque ?

2.b R possède la propriété de la borne supérieure

Voici le théorème essentiel du cours, et même un des résultats les plus importants du cours d'Analyse de première année.

Théorème 7.2.— Propriété de la borne supérieure / Propriété de la borne inférieure

- **(PBS)** Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure
- **(PBI)** Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure

En pratique : pour prouver qu'une partie A possède une borne supérieure :

- vous montrez que A est non vide,
- vous montrez que A est majorée.

Commentaires : la propriété de la borne supérieure est une propriété d'existence, elle sera particulièrement utile pour la démonstration de nombreux théorèmes existentiels en analyse, et en premier lieu, lors de notre prochaine étude des suites réelles.

La démonstration de ce théorème ne figure pas au programme de première année. Nous l'admettrons donc ! Toutefois pour illustrer ce résultat, examinons l'exemple fondamental suivant :

Exemple : considérons les parties A et B de $\mathbf{Q}$ définies par :

$$A = \{x \in \mathbf{Q}^+ \mid x^2 \leq 2\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbf{Q}^+ \mid x^2 \geq 2\}.$$

Comme $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il n'est pas difficile de se convaincre que A ne possède pas de plus grand élément et que B ne possède pas de plus petit élément dans $\mathbf{Q}$. Comme $B = \mathsf{Maj}_{\mathbf{Q}} A$ est l'ensemble des majorants dans $\mathbf{Q}$ de A, *A ne possède pas de plus grand élément* ***ni*** *de plus petit minorant dans* $\mathbf{Q}$. Une telle situation ne peut arriver dans $\mathbf{R}$ puisque le **Théorème** 7.2 permet d'affirmer que pour toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$,A possède un plus grand élément ou $\mathsf{Maj}\,A$ possède un plus petit élément.

Remarque : Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$. Définissons la partie $-A = \{x \in \mathbf{R} \mid -x \in A\}$ formée des opposés des éléments de A. On vérifie aisément que pour tout nombre réel $m \in \mathbf{R}$, m est un minorant de A *si et seulement si* $-m$ majore $-A$.

Cette propriété permet de traduire *mutatis mutandis* tous les résultats concernant les bornes supérieures en des énoncés portant sur les bornes inférieures.
Dans la suite, nous ne traiterons que des bornes supérieures.

Remarque : si $M \in \mathbf{R}$ vérifie :

$$\forall a \in A,\ a \leq M,$$

alors M est une majorant de A. Par conséquent, il est inférieur à la borne supérieure de A Il s'ensuit que

$$\sup A \leq M$$

On dit que la deuxième inégalité résulte des premières par *passage au sup.*

On déduit de cette remarque :

Exercice : Soit $A = \{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1}\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$.

1. Montrez que A possède une borne supérieure
2. Calculez $\sup A$.

Exercice : Croissance de la fonction borne sup —. Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$ telles que $A \subset B$. Montrez que $\sup A \leq \sup B$.

Solution ▽
Notons pour alléger, $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup B$.
• Montrons que β majore A :
Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, a appartient à B. Comme β est un majorant de B, il vient $a \leq \beta$. Ainsi, $\forall a \in A,\ a \leq \beta$, ce qui prouve que β majore A.
• Montrons que $\alpha \leq \beta$:
D'après ce qui précède $\beta \in \mathsf{Maj}\, A$ est un majorant de A. Comme $\alpha = \min \mathsf{Maj}\, A$ est le plus petit des majorants de A, en particulier $\alpha \leq \beta$. ▲

2.c Caractérisation de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, et $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel. On peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} \alpha = \sup A \quad &\iff \quad \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \alpha \text{ est le plus petit majorant de } A \end{cases} \quad \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ \alpha \geq a \\ \forall M \in \mathsf{Maj}\, A,\ M \geq \alpha \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \forall a \in A,\ \alpha \geq a \\ \forall M \in \mathbf{R},\ M < \alpha \Rightarrow M \notin \mathsf{Maj}\,(A) \end{cases} \end{aligned}$$

Dans cette dernière équivalence, la deuxième condition traduit par le fait qu'un nombre strictement inférieur à α ne saurait être un majorant de A. Nous obtenons :

Proposition 7.3.— Caractérisation de la borne supérieure —. Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{(\forall \alpha \in \mathbf{R}) \qquad \alpha = \sup A \quad \iff \quad \begin{cases} \bullet \quad \forall a \in A,\ \alpha \geq a \\ \bullet \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A;\ \alpha - \varepsilon < a \end{cases}}$$

Commentaires : *ii* signifie que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

Démonstration ▽
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.
Supposons que $\alpha = \sup A$. Alors par définition, α est un majorant de A. C'est-à-dire précisément que le premier • est vrai. Montrons le deuxième. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Comme par hypothèse α est le plus petit des majorants de A, $\alpha - \varepsilon$ ne saurait être un majorant de A. Par conséquent, il existe un élément a de A strictement plus grand que $\alpha - \varepsilon$. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer !
Réciproquement, supposons que α vérifie les deux •. Il est clair d'après le premier • que α majore A. Reste à voir que $\alpha = \min(\mathsf{Maj}\, A)$. Soit donc $m \in \mathsf{Maj}\, A$: on montre que $m \geq \alpha$. Pour ce faire, j'utilise un énoncé équivalent [1] En l'occurrence, je montre la propriété universelle :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad m > \alpha - \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ un nombre strictement positif fixé. D'après le deuxième •, il existe $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a$. Comme m est un majorant de A, en particulier il est plus grand que a. Par transitivité de l'ordre, il en résulte finalement l'inégalité $m > \alpha - \varepsilon$. ▲

1. démontré à titre d'exercice au **Chapitre 6** comme illustration de la démonstration par contraposée.

3 Conséquences de la propriété de la borne supérieure

Examinons quelques propriétés supplémentaires des nombres réels :

- la caractérisation des intervalles de **R** ;
- le **théorème d'Archimède**. Il joue un rôle fondamental pour l'étude des suites de nombres réels puisqu'il s'agit essentiellement de montrer que la suite $(1/n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ *est convergente vers* 0 ;
- l'existence de la partie entière d'un réel ;
- les *approximations décimales* d'un nombre réels. Elles donnent un appui théorique à l'intuition des nombres réels qui a été développée au cours des classes antérieures ;
- la densité des nombres rationnels dans **R**.

3.a Intervalles de R

Définition : *Soit $a, b \in \mathbf{R}$, le* ***segment*** $[a, b]$ *est la partie de* **R** *formée des réels compris (au sens large) entre a et b :*

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}; a \le x \le b\}.$$

Nus avons vu en début d'année qu'une partie I de **R** est appelée un **intervalle** si $I = \mathbf{R}$, ou $I = \emptyset$ ou s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ et /ou $\beta \in \mathbf{R}$ tel(s) que I soit l'une des 8 parties suivantes de **R** :

$[\alpha, \beta]$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \le x \le \beta\}$	intervalle borné fermé, ou **segment**
$]\alpha, \beta[$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x < \beta\}$	intervalle borné ouvert
$[\alpha, \beta[$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid \alpha \le x < \beta\}$	intervalle borné semi-ouvert à droite
$]\alpha, \beta]$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid \alpha < x \le \beta\}$	intervalle borné semi-ouvert à gauche
$]-\infty, \beta[$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid x < \beta\}$	intevalle ouvert non minoré
$]-\infty, \beta]$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid x \le \beta\}$	intervalle fermé non minoré
$]\alpha, +\infty[$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\}$	intervalle ouvert non majoré
$[\alpha, \infty[$	$=$	$\{x \in \mathbf{R} \mid x \ge \alpha\}$	intervalle fermé non majoré

Définition : *Une partie C de* **R** *est dite* ***convexe*** *si* $(\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2)\big((a, b) \in C^2 \Rightarrow [a, b] \subset C\big)$.

En ce qui concerne les parties convexes de **R**, la situation est beaucoup plus simple que dans le plan :

Théorème 7.4.— Les parties convexes de **R** sont les intervalles.

Commentaires : ainsi tout intervalle est convexe et toute partie convexe de **R** est un intervalle.

Démonstration ▽
Le sens facile[2] d'abord !!!
Soit I un intervalle de **R**. Montrons que I est convexe.
Remarquons tout d'abord que **R** et $\emptyset$ sont convexes. C'est absolument évident ! S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $I =]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbf{R};\ \alpha < x \le \beta\}$, par exemple. Soit a et b deux éléments de I, on montre que le segment $[a, b]$ est contenu dans I. Soit donc $x \in [a, b]$, par définition, cela signifie que $x \ge a$ et $x \le b$. Or, $a \in]\alpha, \beta]$, donc $a > \alpha$. Par transitivité de $\ge$, on en déduit que $x > \alpha$[3]. D'autre part, comme $b \in]\alpha, \beta]$, $b \le \beta$. Or, $x \le b$. Par transitivité de $\le$, il en résulte que $x \le \beta$.
On suit exactement la même méthode de démonstration pour chacun des 7 autres cas.
Le sens difficile maintenant :

- ► Si C est vide, alors c'est un intervalle.
- ► Si $C = \mathbf{R}$, alors c'est un intervalle.
- ► Si C est réduit à un point, alors c'est un intervalle.

Dans le cas où C contient au moins deux points, il y a 4 sous-cas suivant que C est majoré ou pas, minoré ou pas.

- ► Si C est borné, *i.e.* majoré et minoré, alors d'après le **Théorème** 7.2 ainsi que la propriété de la borne inférieure, C possède une borne inférieure α et une borne supérieure β. Comme α est un minorant de C et que β est un majorant de C, il est clair que $C \subset [\alpha, \beta]$.
  Montrons que $]\alpha, \beta[\subset C$: soit donc $x \in]\alpha, \beta[$, on montre que $x \in C$.

---
2. Encore faut-il savoir lequel c'est !
3. $(\ a \le b$ et $b < c) \Rightarrow a < c$

• Comme $x > \alpha = \max(\mathsf{Min}\, C)$, x ne peut pas être un minorant de C. Il existe donc $a \in C$ tel que $a < x$.
• De manière analogue, comme $x < \beta$, x n'est pas un majorant de C. Il existe donc $b \in C$ tel que $x < b$.
• Il en résulte que $x \in]a, b[$ où a, b appartiennent à C. Par convexité de C, le segment $[a, b]$ est contenu dans C. En particulier, $x \in C$. Pour résumer, nous avons obtenu les inclusions :

$$]\alpha, \beta[\subset C \subset [\alpha, \beta].$$

Pour conclure, il suffit de constater que ces inclusions ne sont satisfaites que dans 4 cas, obtenus suivant que les bornes α et β appartiennent ou non à C.

▸ les autres cas se traitent de manière analogue. ▲

3.b R a la propriété d'Archimède

Tout comme $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ possède la propriété d'ARCHIMÈDE.

Théorème 7.5.— Théorème d'Archimède

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0), (\forall a \in \mathbf{R}), \quad (\exists n \in \mathbf{N}); \quad (n\varepsilon > a)}$$

Commentaires : c'est le théorème du ZOOM !

Démonstration ▽
Montrons par l'absurde qu'il existe un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ tel que $n\varepsilon_0 > a$. *Supposons que ce n'est pas le cas*, i.e. $\forall n \in \mathbf{N}$, $n\varepsilon_0 \leq a$. Posons $B = \{n\varepsilon_0, n \in \mathbf{N}\}$. Par hypothèse B est majoré par a, et non vide par construction. D'après le **Théorème** 7.2, B possède une borne supérieure. *Let's call it* α. Appliquons la caractérisation 7.3 de α avec $\varepsilon = \varepsilon_0$: il en résulte l'existence d'un réel $b \in B$ tel que

$$\alpha - \varepsilon_0 < b. \tag{7.1}$$

Par construction, puisque $b \in B$, il existe un entier naturel $n \in \mathbf{N}$ tel que $b = n\varepsilon_0$. Réinjectons ceci dans (7.1), il s'ensuit que $\alpha < (n+1)\varepsilon_0$. Posons $c = (n+1)\varepsilon_0$. Alors $c \in B$ et $\alpha < c$. Ce qui *contredit* le fait que α est un majorant de B. ▲

Le **Théorème** 7.5 est très utile pour l'étude des suites de nombres réels. Par exemple, en l'appliquant avec $a = 1$, nous obtenons :

Corollaire 7.6.—

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N}^\star)\ \text{ tel que } \quad \left((\forall n \in \mathbf{N}^\star),\ (n \geq n_0) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \right).$$

Commentaires : autrement dit $1/n$ est arbitrairement petit, pourvu que n soit suffisamment grand. Vous avez peut-être reconnu cette assertion, il s'agit de la version quantifiée de l'assertion ≪la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}^\star}$ est convergente de limite 0≫.

Démonstration ▽
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le **Théorème** 7.5, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n_0\varepsilon > 1$.
Soit $n \geq n_0$, par compatibilité de l'ordre avec la multiplication, il en résulte immédiatement que $n\varepsilon \geq n_0\varepsilon > 1$. D'où l'on tire finalement $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. ▲

3.c Partie entière

Proposition-Définition 7.7.— Soit $x \in \mathbf{R}$. Il existe un entier relatif $n \in \mathbf{Z}$, unique tel que

$$\boxed{n \leq x < n+1}$$

n est appelé la **partie entière** de x, on le note $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration ▽

■ **Unicité**
Soit $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\left\| \begin{array}{lll} n & \leq x < & n+1 \\ m & \leq x < & m+1 \end{array} \right.$. Il en résulte aisément que $(x-1) - x < n - m < x - (x-1)$, soit $-1 < n - m < 1$. Comme $n - m$ est un entier, il s'ensuit que $n - m = 0$.

- **Existence**
  D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n_1 tel que $x \leq n_1$ et un entier n_2 tel que $-x \leq n_2$. Considérons alors la partie $A = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}$. A est non vide car elle contient $-n_2$ et majorée par x. A est donc une partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$, par suite, elle possède un plus grand élément. Appelons-le n. Comme $n \in A$, $n \leq x$. De plus, comme n est le plus grand élément de A, $n+1 \notin A$, ie, $n+1 > x$. ▲

3.d Approximation décimale d'un réel

Grâce à la partie entière, nous pouvons justifier notre idée intuitive des nombres réels, comme *limite* de nombres décimaux.

Définition : *Un nombre **décimal** est un nombre rationnel r qui peut s'écrire sous la forme $r = \dfrac{p}{10^q}$, où $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$.*

Exemple : $5,1576484614$ est un nombre décimal, mais $1/3$ n'est pas un nombre décimal. Pourtant, nous pouvons approcher $1/3$ par des nombres décimaux :

$$1/3 \approx 0,333333333 \text{ à un milliardième près}$$

Cette approximation peut être menée pour n'importe quel réel grâce à l'algorithme suivant :
Considérons $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, alors par définition de la partie entière

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq \quad 10^n x \quad < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

et par conséquent

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq \quad x \quad < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 10^{-n}. \tag{7.2}$$

Définition : *Les suites de nombres décimaux $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $q_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 10^{-n}$ sont appelées **approximations décimales** de x par défaut et par excès.*

Nous montrerons ultérieurement que les suites (p_n) et (q_n) vérifient :

Proposition 7.8.—
- La suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante , la suite $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
- Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $p_n \leq x < q_n$.
- Pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $|p_n - q_n| = 10^{-n}$.

Ainsi, tout nombre réel x peut être approché par des nombres décimaux –donc rationnels– avec une précision arbitrairement[4] petite.

Exemple : approximation successives de π :

$$\begin{aligned} p_0 = 3 \quad &\leq \pi < \quad q_0 = 4 \\ p_1 = 3,1 \quad &\leq \pi < \quad q_1 = 3,2 \\ p_2 = 3,14 \quad &\leq \pi < \quad q_2 = 3,15 \end{aligned}$$

Remarque : Comme nous le verrons bientôt, les suites (p_n) et (q_n) définies ci-dessus sont *adjacentes* et par conséquent convergentes et de même limite. D'après l'encadrement (7.2), cette limite ne peut être que x.

3.e Densité des rationnels

Définition : *Une **partie** A de $\mathbf{R}$ est dite **dense** dans $\mathbf{R}$ si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ rencontre A.*

Proposition 7.9.— Densité des rationnels —. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x < y$. Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle ouvert $]x, y[$.

4. c'est-à-dire que c'est l'*utilisateur* qui a le choix

Commentaires : ceci étant vrai pour tout couple (x, y) de réels tels que $x < y$, cela signifie précisément que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Démonstration ▽

Idée : *grâce à la propriété d'Archimède, nous allons ≪dilater≫l'intervalle* $]x, y[$, *jusqu'à pouvoir y coincer un entier.*

Posons $\varepsilon = y - x$. Par hypothèse, ε est strictement positif. Par suite, d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $q \in \mathbf{N}^\star$ tel que $q\varepsilon > 1$, ce qui revient à dire que

$$1 + qx < qy$$

Posons $p = 1 + \lfloor qx \rfloor$. Alors par définition de la partie entière, nous avons $qx < p$ et $p \leq 1 + qx$. Par transitivité, il s'ensuit que

$$qx < p < qy$$

En divisant par $q \in \mathbf{N}^\star$ cet encadrement, on obtient que $r = p/q$ convient. ▲

Corollaire 7.10.— Densité des irrationnels —. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x < y$. Il existe un nombre irrationnel ξ dans l'intervalle ouvert $]x, y[$.

Démonstration ▽

Il suffit d'appliquer le résultat précédent dans l'intervalle ouvert $]x/\sqrt{2}, y/\sqrt{2}[$. ▲

II Généralités sur les suites réelles

1 Définitions, exemples de construction

1.a Définition

Définition : *Une* ***suite de nombres réels*** *est une application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ de $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. L'image de n est notée u_n plutôt que $u(n)$. On l'appelle*[5] *le $n^{\text{ième}}$* ***terme*** *de la suite u. La suite u est elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ou $(u_n)_{n\geq 0}$.*
L'ensemble des suites de nombres réels est noté $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Warning : comme dans la définition de liste, l'application u n'est pas supposée injective, un même nombre réel peut donc apparaître plusieurs fois dans la suite, à des rangs différents.
Ne confondez pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec l'ensemble des valeurs $\{u_n ; n \in \mathbf{N}\}$! Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ sont distinctes, mais elles ont le même ensemble de valeurs, à savoir $\{-1, 1\}$. On retiendra que deux suites sont égales si elles sont égales en tant qu'applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire :

Définition : égalité de deux suites —. *Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont* ***égales*** *si*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = v_n$$

1.b Représentation d'une suite

On peut représenter une suite comme une fonction de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$, c'est-à-dire à l'aide de son graphe.

On peut aussi représenter les valeurs de la suite sur la droite réelle.

1.c Exemples de construction

- Soit $a \in \mathbf{R}$ un nombre réel, on définit la suite **constante égale à** a :

  $$(a, a, a, a, a, \dots)$$

  Dans la suite, nous noterons simplement a, la suite constante égale à a.
  Une suite est dite **stationnaire** en a si elle est constante égale à a, à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

  $$(\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N}), \big((n \geq n_0) \Rightarrow (u_n = a)\big).$$

5. on dit aussi terme général, ou terme de rang n

- D'autres exemples de suites réelles sont donnés par la restriction à $\mathbf{N}$ de fonctions $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. En effet si $\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est une fonction réelle, alors sa restriction à $\mathbf{N}$
$$\begin{array}{rcl} f_| : \mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}$$
est une suite de nombres réels. Par exemple, les suites $(\sin n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(3n+2)_{n\in\mathbf{N}}$ sont les restrictions à $\mathbf{N}$ des fonctions[6] $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto 3x+2$.
- Nous étudierons aussi des exemples de suites définies par une relation de récurrence, comme la suite de **Fibonacci** donnée par
$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}.$$
- Certaines suites sont définies implicitement, comme solution d'une famille d'équation. Par exemple, étant donné $n \in \mathbf{N}^\star$, on note u_n l'unique solution positive de l'équation $(E_n) : x^n + 9x^2 - 4 = 0$.

Remarque : l'intérêt essentiel des suites concerne leur comportement lorsque n est très grand, c'est pourquoi nous appellerons encore une suite toute application $u : [\![p, +\infty[\![\to \mathbf{R}$, même si la liste des p premiers termes est indéterminée. On note en ce cas $(u_n)_{n\geq p}$. Dans la suite du cours, nous ne discuterons que des propriétés des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, mais les résultats s'appliquent modulo quelques modifications mineures, aux suites $(u_n)_{n\geq p}$.

2 Opérations sur les suites réelles

2.a Somme de suites

Définition : *Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \times \mathbf{R}^\mathbf{N}$ la suite **somme** $u + v$ est définie par :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, (u+v)_n = u_n + v_n}$$

Remarque : l'addition ainsi définie sur $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ est une **loi de composition interne** (l.c.i.) : la somme de deux suites est encore une suite. Cette l.c.i est associative et commutative. De plus elle possède un élément neutre qui est bien sûr la suite constante égale à 0. L'opposée d'une suite (u_n) est la suite $(-u_n)$.

Vocabulaire : *on dit que $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ muni de l'addition ci-dessus est un groupe commutatif.*

2.b Produit de suites

Définition : *Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \times \mathbf{R}^\mathbf{N}$ la suite **produit** $u \times v$ est définie par :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n}$$

Remarque : la multiplication des suites définit aussi une l.c.i. dans $\mathbf{R}^\mathbf{N}$. Elle est commutative et associative. En outre, elle est distributive sur l'addition et possède comme unité la suite constante égale à 1.

Vocabulaire : *on dit que le triplet $(\mathbf{R}^\mathbf{N}, +, \times)$ est un anneau commutatif.*

2.c Multiplication par un réel

Définition : *Le **produit d'une suite** (u_n) **par un réel** λ est la suite $\lambda \cdot u$ définie par*

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ (\lambda \cdot u)_n = \lambda \cdot u_n}$$

La multiplication par un réel définit une **loi de composition externe**. Il découle directement des définitions les propriétés de compatibilité avec les lois internes suivantes :

Proposition 7.11.— Propriétés de la multiplication externe —. Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^\mathbf{N} \times \mathbf{R}^\mathbf{N}$ un couple de suites de nombres réels $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ un couple de réels, alors :

1. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
2. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda.\mu) \cdot u$.
4. $1 \cdot u = u$.

6. définies sur $\mathbf{R}^+$

Vocabulaire : *on dit que le triplet* $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$ *est un* ***espace vectoriel*** *sur* $\mathbf{R}$*. Nous n'entrerons pas maintenant dans une étude approfondie de la notion d'espace vectoriel, retenez simplement la notion de combinaison linéaire, dont les règles de calculs sont précisées dans la* **Proposition** *précédente :*

Définition : *Soit* $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *un couple de suites de nombres réels, on appelle* ***combinaison linéaire*** *des suites* u *et* v*, toute suite de la forme* $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$*, où* λ *et* μ *sont des nombres réels.*

On vérifie immédiatement la propriété d'associativité mixte :

Proposition.— Compatibilité avec la multiplication interne

$$\forall(\lambda, u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \times v).$$

2.d Suite extraite

Soit u et v deux suites de nombres réels. On dit que v est extraite de u lorsque v est construite en sélectionnant (dans le bon ordre) certains termes de la suite u :

$$u = (3, \cancel{2}, \cancel{4}, 6, \cancel{5}, \cancel{7}, 12, \cancel{11}, \cancel{13}, 24, \cancel{23}, \cancel{25}, 48, \ldots)$$
$$v = (3, 6, 12, 24, 48, \ldots \qquad)$$

Dans l'exemple ci-dessus, v est extraite de u en ne sélectionnant que les termes de u de rang les multiples de 3. Plus précisément

Définition : *Soit* $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ *deux suites d'éléments de* $\mathbf{R}$*. On dit que* $v = (v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *est une* ***suite extraite***[7] *de la suite* $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *s'il existe une application* $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ***strictement croissante*** *telle que :*

$$\forall k \in \mathbf{N},\ v_k = u_{\varphi(k)}. \tag{7.3}$$

Commentaires : le rôle de l'application φ est donc d'extraire les termes de la suite v parmi ceux de u. On l'appelle la fonction **extractrice**.

Rappelons-nous qu'une suite est, par définition, une application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$. La relation (7.3) s'écrit en notation *application* :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ v(k) = u(\varphi(k)),$$

c'est-à-dire $v = u \circ \varphi$. Ainsi, v est une sous-suite de u *si et seulement si* il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, **strictement croissante** telle que $v = u \circ \varphi$.

Retenez le schéma suivant :

$$\mathbf{N} \xrightarrow{\varphi \nearrow s.} \mathbf{N} \xrightarrow{u} \mathbf{R}.$$

Exemples : Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}) sont des suites extraites de la suite (u_n). Par exemple la suite (u_{2n}) est construite en ne gardant de la suite u que les termes de rang pair. En ce cas, l'extractrice φ est l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ k & \mapsto & 2k \end{array}$$

Exercice :

- Montrez que la suite constante égale à 1 et la suite constante égale à -1 sont extraites de la suite $(\cos n\pi)_{n \in \mathbf{N}}$.
- La suite $\cos(n^2 - n)$ est-elle extraite de $(\cos n)_{n \in \mathbf{N}}$?

Notation : *Lorsque* $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *est donné par* $\varphi(k) = k + p$*, où* p *est un entier fixé, la suite extraite* $v = u \circ \varphi$ *est notée simplement* $(u_n)_{n \geq p}$*.*

7. on dit aussi sous-suite

3 Suites réelles et ordre

3.a Relation d'ordre sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$

Définition : *On définit une relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ par :*

$$\left(\forall (u,v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right), \quad \left((u \preceq v) \iff (\forall n \in \mathbf{N}),\ (u_n \leq v_n)\right).$$

Une suite u est dite ***positive*** *si $u \succeq 0$, où 0 dénote la suite nulle.*

Notation : *Désormais, nous noterons $\leq$ la relation d'ordre sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.*

3.b Suites bornées

Définition : *Une suite de nombres réels $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est dite* ***bornée*** *si :*

$$(\exists M \in \mathbf{R}^+);\ (\forall n \in \mathbf{N}),\ |u_n| \leq M.$$

Commentaires : en clair, une suite réelle est bornée *si et seulement si* **tous** les termes de la suite restent dans **un** segment $[-M, M]$.

Je vous rappelle qu'on ne peut intervertir deux quantificateurs consécutifs sans changer la valeur logique d'une assertion, qu'à la seule condition que ces quantificateurs soient de même nature... Cela devient crucial à partir de ce chapitre. Par exemple pour vérifier qu'une suite u est bornée, il s'agit de trouver **un** réel positif supérieur ou égal à $|u_n|$ pour **tout** $n \in \mathbf{N}$.

Proposition.— Soit $(u,v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites bornées, $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel. Alors :

1. $u + v$ est une suite bornée.

2. $u \times v$ est une suite bornée.

3. $\lambda \cdot u$ est une suite bornée.

Démonstration $\triangledown$

Comme u et v sont bornées, il existe $M_u \geq 0$ et $M_v \geq 0$ tels que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M_u$ et $|v_n| \leq M_v$. D'après les propriétés de la valeur absolue, il en résulte que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$:

1. $|(u+v)_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_u + M_v$, d'après l'**inégalité triangulaire**.

2. $|(u \times v)_n| = |u_n \times v_n| = |u_n|.|v_n| \leq M_u.M_v$, et

3. $|(\lambda \cdot u)_n| = |\lambda.u_n| = |\lambda||u_n| \leq |\lambda|.M_u$;

ce qui prouve que les suites $u + v$, $u \times v$ et $\lambda \cdot u$ sont bornées. ▲

Exercice : Soit u la suite définie pour $n \in \mathbf{N}^\star$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$. Montrez que la suite u est bornée.

3.c Suites majorées, minorées

Définition : *Une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est dite :*

- ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé un* ***majorant*** *de u.*
- ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé un* ***minorant*** *de u.*

En pratique : pour démontrer qu'une suite est majorée par exemple, vous devez majorer u_n par un nombre M **qui ne dépend pas**[8] de n.

Exercice : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n = n^2 - 2n$.

1. Montrez que la suite u est minorée.

2. Est-elle majorée ?

Proposition.— Une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de nombres réels est bornée *si et seulement si* elle est majorée et minorée.

8. Si M est indépendant de n, il majore donc tous les termes de la suite

Démonstration $\triangledown$
La condition est nécessaire :
Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite bornée. Par définition, il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}\ |u_n| \leq M$. Fixons $n \in \mathbf{N}$. Par définition de la valeur absolue, nous avons $-M \leq u_n \leq M$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbf{N}$, il en résulte que la suite u est majorée (par M) et minorée (par $-M$).
La condition est suffisante :
Soit M (*resp.* m) un majorant (*resp.* minorant) de la suite u. Posons $A = \max\{|M|, |m|\} \in \mathbf{R}^+$. Fixons $n \in \mathbf{N}$, il vient d'une part

$$u_n \geq m \geq -A,$$

et d'autre part

$$u_n \leq M \leq A.$$

Ainsi $-M \leq u_n \leq M$.
Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous en déduisons que : $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leq M$. ▲

3.d Bornes supérieure et inférieure

Définition : *Soit u une suite majorée (resp. minorée). On note en ce cas :*

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_n u_n & = & \sup\{u_n;\ n \in \mathbf{N}\} \\ \textit{resp.}\ \inf\limits_n u_n & = & \inf\{u_n;\ n \in \mathbf{N}\} \end{array}$$

Commentaires : lorsque la suite u est majorée (*resp.* minorée), la partie –non vide– $\{u_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ de $\mathbf{R}$ l'est. Par conséquent d'après la **Propriété de la borne supérieure**, elle possède une borne supérieure (*resp.* inférieure).

3.e Suites monotones

Une suite de nombres réels est une liste **ordonnée** de nombres réels. Une suite sera dite *croissante* si ces nombres sont rangés par **ordre croissant**, c'est-à-dire du plus petit au plus grand ! Plus précisément :

Définition : *Une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de nombres* réels *est dite :*

- ***croissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- ***décroissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- ***strictement croissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_n < u_{n+1}$.
- ***strictement décroissante*** *si* $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > u_{n+1}$.

Une suite de nombres réels est aussi une *application* de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$. Nous avons donc une autre notion de monotonie, celle d'application monotone, comme définie au **Chapitre 3**. Heureusement, il s'agit de la même notion :

Proposition.— Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Alors

1. La suite u est croissante *ssi* $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m\big)$.
2. La suite u est décroissante *ssi* $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n \leq m \Rightarrow u_n \geq u_m\big)$.
3. La suite u est strictement croissante *ssi* $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n < m \Rightarrow u_n < u_m\big)$.
4. La suite u est strictement décroissante *ssi* $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n < m \Rightarrow u_n > u_m\big)$.

Remarque : en particulier, une suite croissante (*resp.* décroissante) est minorée (*resp.* majorée) par son premier terme.

Démonstration $\triangledown$
Montrons le 1. Supposons que u vérifie $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m\big)$. Alors, en particulier, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, comme $n \leq n+1$, nous en déduisons que $u_n \leq u_{n+1}$.
Réciproquement, supposons que u est croissante. Soit $n \in \mathbf{N}$ *fixé*. Démontrons par récurrence sur m la propriété
$\mathcal{P}(m)$: $(\forall m \in \mathbf{N}),\ (m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n)$
Initialisation : lorsque $m = n$, par réfléxivité de la relation d'ordre, nous avons $\mathcal{P}(n)$.
Hérédité : soit $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n$ tel que $\mathcal{P}(m)$ soit vrai. La suite u étant croissante par hypothèse, $u_{m+1} \geq u_m$. D'après l'hypothèse de récurrence et la transitivité de $\geq$, il s'ensuit que $u_{m+1} \geq u_n$, ie. $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Conclusion : nous avons démontré par récurrence que $\forall (n,m) \in \mathbf{N}^2, \big(n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m\big)$. ▲

En pratique : étudier la monotonie d'une suite $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, c'est comparer deux termes consécutifs de u. Pour cela, vous pouvez :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque la suite est à termes non nuls et de signe constant ;
- étudier f lorsque u est définie comme la restriction à $\mathbf{N}$ d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Exercice : Etudiez la monotonie des suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définies par :

$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $\qquad \forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, $\qquad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ w_n = \ln(1+e^{-n})$.

Solution ▽

Dans chaque cas, nous utilisons une méthode adaptée :

- *monotonie de u : soit $n \in \mathbf{N}$, par télescopage*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n + 1 < u_n$. La suite u est strictement croissante.

- *monotonie de v : la suite v est inversible (ses termes sont tous non nuls) et positive, j'étudie plutôt les quotients : Soit $n \in \mathbf{N}$, alors*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)} \times \frac{2^n n!}{(2n)!} \\ &= (2n+1) \geq 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite v est croissante.

- *monotonie de w : la suite v est obtenue par restriction à $\mathbf{N}$ de la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$. Par composition, il est clair que cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$. Par conséquent,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(n) > f(n+1)$$

ce qui revient précisément à dire que u est strictement décroissante. ▲

On déduit immédiatement de la compatibilité de l'ordre avec l'addition et la multiplication dans $\mathbf{R}$:

Proposition.— Soit u et v deux suites de nombres réels.

- **Si** u et v sont croissantes **alors** la suite somme $u+v$ est croissante,
- **Si** u et v sont décroissantes **alors** la suite somme $u+v$ est décroissante,
- **Si** u est croissante **alors** la suite opposée $-u$ est décroissante,
- **Si** u est décroissante **alors** la suite opposée $-u$ est croissante,
- **Si** u et v sont croissantes et *positives* **alors** la suite produit $u \times v$ est croissante,
- **Si** u et v sont décroissantes et *positives* **alors** la suite produit $u \times v$ est décroissante,
- **Si** u est croissante et *strictement positive* **alors** la suite inverse u^{-1} est décroissante,
- **Si** u est décroissante et *strictement positive* **alors** la suite inverse u^{-1} est croissante.

Remarque : pour les 4 dernières propriétés ci-dessus, la positivité [9] est essentielle. Cherchez des contre-exemples lorsque les suites ne sont pas de signes constants.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite de nombres réels, monotone. On lui associe la suite des moyennes arithmétiques $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrez que v est monotone de même monotonie que u.

9. ou négativité

III Suites réelles possédant une limite

1 Suites convergentes vers 0

1.a Définition quantifiée de suite convergente vers 0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Intuitivement, (u_n) est convergente vers 0 si tout intervalle ouvert contenant l'origine contient tous les termes de la suite u sauf[10] un nombre fini d'entre eux. Plus précisément

Définition : Suite convergente vers 0 —. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On dit que (u_n)* ***est convergente vers 0*** *si :*

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\,(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon)}$$

Notation : *On note $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ cette relation. $\mathscr{E}_0$ désigne l'ensemble des suites convergeant vers 0.*

Commentaires : une suite (u_n) converge vers 0 si les termes de la suite sont **arbitrairement** petits (en valeur absolue) pourvu que n soit **suffisamment grand**. Ici, il faut traduire le terme **arbitraire** par ≪**laissé au choix de l'utilisateur**≫.

Illustration : choisissons un réel ε strictement positif. Si la suite u converge vers 0, presque tous les termes de la suite sont compris entre $-\varepsilon$ et ε : seule une poignée de jeunes[11] rebelles restent à l'extérieur de cet intervalle. Mais ceci ne résume pas la définition de suite convergente vers 0. En effet, le point important c'est que ce principe reste valable pour **n'importe quel choix de** ε. Par exemple, si je recommence avec un réel 10 $milliards^{10\ milliards}$ fois plus petit, je dois retrouver le même dessin. Il n'est donc qu'une possibilité pour représenter une suite convergente vers 0 : les termes de cette suite doivent **s'accumuler** autour de 0.

En pratique :

- si vous savez qu'une suite u converge vers 0, vous êtes l'utilisateur de la définition ci-dessus : **vous** avez donc le **choix** de l'appliquer pour n'importe quelle valeur (strictement positive) de ε .
- si vous devez démontrer qu'une suite u converge vers 0, vous devez **laisser le choix** au futur utilisateur de la propriété $u \in \mathscr{E}_0$. Pour prouver cette propriété universelle $\forall\varepsilon > 0, \ldots$, donnez-vous un réel ε strictement positif, **sans le choisir** et montrez que la propriété est vraie pour cet ε-là. Comme vous n'avez pas choisi de réel ε particulier pour votre démonstration, cela prouve que **la propriété est vraie pour n'importe quel choix** de ε !

1.b Premiers exemples de suites convergentes vers 0

Si u est la suite nulle, alors $u \in \mathscr{E}_0$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on a pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| = 0 < \varepsilon$! !
Si la suite est stationnaire en 0, c'est-à-dire si les termes de la suite u sont nuls à partir d'un certain rang $r_0 \in \mathbf{N}$, alors, bien sûr étant donné $\varepsilon > 0$, on a pour tout entier $n \geq r_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$.

Le premier exemple non trivial de suite convergente est une conséquence de la **Prorpiété de la Borne Supérieure** et plus précisément de la **Propriété d'Archimède** :

Lemme 7.12.— Soit u la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Démonstration ▽
Soit $\varepsilon > 0$ *fixé*. Notre but est de prouver l'existence d'un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. C'est la propriété d'Archimède ! En effet, d'après le **Corollaire** 7.6, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbf{N}),\ (n \geq n_0 \Rightarrow n\varepsilon > 1)$$

Soit $n \geq n_0$, alors $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Ainsi, nous avons prouvé que $(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\,(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon)$. ▲

10. éventuellement
11. petit rang !

Remarques : retournez à la définition de suite convergente vers 0

1. le fait que u soit convergente vers 0 ne dépend pas des p premiers termes de la suite. Par conséquent :

$$(u_n)_{n\geq 0} \in \mathscr{E}_0 \iff (u_n)_{n\geq p} \in \mathscr{E}_0$$

2. le fait que u soit convergente vers 0 ne dépend en fait que de la suite des valeurs absolues :

$$(u_n)_n \in \mathscr{E}_0 \iff (|u_n|)_n \in \mathscr{E}_0$$

Exemple : ainsi, la suite $v = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ converge vers 0.

2 Propriétés des suites convergentes vers 0

Je pense que les propriétés de $\mathscr{E}_0$ vous paraitront très claires, voire évidentes. Toutefois, elles sont fondamentales !

2.a Convergence par comparaison ❤

Le premier résultat que nous démontrons ouvre la voie à ceux que j'appellerai les résultats d'*existence de limite par comparaison* :

Théorème 7.13.— Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ (\forall n \in \mathbf{N}),\quad |v_n| \leq |u_n| \\ \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Commentaires : ce **Théorème** est tout à fait conforme à l'intuition : *plus petite est la valeur absolue de la suite, meilleures sont ses chances d'appartenir à* $\mathscr{E}_0$!

Démonstration ▽

Soit $\boxed{\varepsilon > 0 \text{ fixé}}$, une fois pour toutes ! *Imaginez* l'intervalle symétrique $[-\varepsilon, \varepsilon]$. On cherche un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite v sont dans cet intervalle, c'est-à-dire tel que

$$(n \geq n_0) \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon.$$

Comme par hypothèse $u \in \mathscr{E}_0$, $\boxed{\text{il existe } n_0 \in \mathbf{N}}$, tel que $(n \geq n_0) \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.

J'affirme que cet entier n_0 fait le coup !!

En effet soit $\boxed{n \geq n_0}$, alors $\boxed{|v_n| \leq |u_n| \leq \varepsilon}$. ▲

En appliquant le **Théorème** 7.13 aux suites extraites $(u_n)_{n\geq p}$ et $(v_n)_{n\geq p}$ nous obtenons une version *slightly stronger* de ce **Théorème** :

Corollaire 7.14.— Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, et $p \in \mathbf{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (\forall n \geq p),\quad |v_n| \leq |u_n|) \\ \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

En pratique : pour prouver que $u \in \mathscr{E}_0$, vous pouvez

- majorer la valeur absolue du terme général par le terme général d'une suite convergente vers 0.
- conclure en invoquant le **théorème d'existence de limite par comparaison**

Nous pouvons appliquer ce corollaire pour obtenir de nouveaux exemples de suites convergentes vers 0 :

Conséquences :

- Soit $k \in \mathbf{N}^\star$ fixé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, nous avons $n^k \geq n$, c'est-à-dire que $0 < \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$.
  Or, nous savons que $(1/n)_{n\geq 1} \in \mathscr{E}_0$. D'après le **Corollaire** précédent, il s'ensuit que $(1/n^k)_{n\geq 1} \in \mathscr{E}_0$.
- D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $n! \geq n$. Comme précédemment, nous déduisons du **Corollaire** que $(1/n!)_{n\geq 0} \in \mathscr{E}_0$.

- la suite géométrique $(1/2^n)$ est convergente vers 0. En effet, notons $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. Il est clair que u est strictement positive. De plus, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $2^n \geq n$. Par compatibilité de l'ordre avec le passage aux inverses, j'en déduis

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Comme la suite $(1/n)$ est convergente vers 0, il en résulte que (u_n) est convergente vers 0.

2.b Stabilité par combinaison linéaire

Théorème 7.15.— Soit $(u,v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \bullet\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} i)\ \lambda \cdot u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ ii)\ u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right.}$$

Commentaires : En *combinant* les résultats $i)$ et $ii)$ du **Théorème** 7.15, nous obtenons que $\forall (u,v) \in \mathscr{E}_0 \times \mathscr{E}_0$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, la suite $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ reste dans $\mathscr{E}_0$. On dit que $\mathscr{E}_0$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Démonstration $\triangledown$

Montrons le i)

je fais mon brouillon : $|\lambda.u_n| \leq |\lambda|.|u_n|$. Je voudrais que tout ceci soit plus petit qu'un ε donné. Si λ est non nul, alors je peux diviser et je me ramène à trouver n_0 tel que $|u_n| < (\lambda)^{-1}\varepsilon$, sinon, il n'y a rien à faire puisque $\lambda \cdot u$ est la suite nulle ! *Fin du brouillon.*

Si $\lambda = 0$, la suite $\lambda \cdot u$ est la suite nulle, qui converge vers 0.
Supposons $\lambda \neq 0$, et considérons $\varepsilon > 0$ fixé. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/|\lambda|$. Appliquons la définition de $u \in \mathscr{E}_0$ pour ce *choix* de epsilon : il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans l'intervalle centré en l'origine et de rayon ε', *i.e.*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon'.$$

Par compatibilité de l'ordre avec la multiplication, il en résulte que si $n \geq n_0$, $|\lambda.u_n| \leq |\lambda|\varepsilon' = \varepsilon$.

Montrons le ii) Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

je fais mon brouillon : Il s'agit de *majorer* la valeur absolue de la *somme*. Le bon réflexe c'est l'*inégalité triangulaire* : $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$.
Je voudrais que tout ceci soit plus petit que le ε que je me suis donné. Pour cela *il suffit* que $|u_n| \leq \varepsilon/2$ et $|v_n| \leq \varepsilon/2$. *Fin du brouillon.*

Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Appliquons la définition de $u \in \mathscr{E}_0$ pour ce choix de *rayon*. Il existe donc un entier $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon/2.$$

De même, comme $v \in \mathscr{E}_0$, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_2 \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon/2.$$

A présent, nous voudrions pouvoir utiliser *simultanément* ces deux inégalités. Pour ce faire, posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.
Soit $n \geq n_0$, alors $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$, par conséquent les deux estimations ci-dessus sont valides et donc :

$$|u_n| \leq \varepsilon/2 \text{ et } |v_n| \leq \varepsilon/2$$

On déduit finalement de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{array}{rcl} |u_n + v_n| & \leq & |u_n| + |v_n| \\ & < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{array}$$

Conclusion : Pour tout $\varepsilon > 0$ j'ai trouvé un n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n + v_n| \leq \varepsilon$. ▲

Corollaire 7.16.— Comparaison logarithmique —. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites inversibles, $p \in \mathbf{N}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} \bullet & v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \bullet & \forall n \geq p,\ \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \end{array}\right) \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Démonstration $\triangledown$
par hypothèse, la suite $\left(\frac{|u_n|}{|v_n|}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante à partir du rang p. En particulier, elle est majorée, à partir du rang p par son $p^{\text{ième}}$ terme. Il en résulte que

$$\forall n \geq p, \quad |u_n| \leq \big(|u_p|/|v_p|\big)\, |v_n|$$

Or par hypothèse, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente vers 0. Par stabilité par combinaison linéaire, la suite de terme général $\big(|u_p|/|v_p|\big)\, |v_n|$ est aussi une suite convergente vers 0. Le résultat découle alors du théorème de convergence par comparaison. ▲

Corollaire 7.17.— Soit $x \in]-1,1[$. La suite $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente vers 0.

Démonstration $\triangledown$
Posons $\varepsilon = 1-|x|$. Comme $x \in]-1,1[$, ε est strictement positif. D'après la **propriété d'Archimède**, il en résulte l'existence d'un entier $p \in \mathbf{N}^\star$ avec la propriété :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq p \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

On en déduit alors que pour tout entier n strictement supérieur à p :

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} &= 1-\frac{1}{n} \\ &\geq 1-\varepsilon = |x| \\ &\geq \frac{|x|^n}{|x|^{n-1}} \end{aligned}$$

Notons pour $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = x^n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. L'inégalité précédente s'écrit :

$$\forall n > p, \quad \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

Comme la suite (v_n) est convergente vers 0, on peut appliquer le **théorème de comparaison logarithmique** pour en déduire que la suite (u_n) est elle aussi convergente vers 0. ▲

2.c Bornitude d'une suite convergente vers 0

Théorème 7.18.— Fondamental —.

Soit (u_n) une suite convergente vers 0. Alors la suite (u_n) est bornée.

Démonstration $\triangledown$
Cherchons $M \in \mathbf{R}^+$ tel que **tous les termes sans exception** soient dans l'intervalle symétrique centré en l'origine et de rayon M.

Je fais mon brouillon : comme $u \in \mathscr{E}_0$, nous savons que **tous** les termes **sauf** un nombre fini sont dans un intervalle symétrique de rayon *ce-que-vous-voulez.* Le seul problème c'est que les premiers termes peuvent être très très grands. *Fin du brouillon.*

Prenons $\varepsilon = 1$: comme $u \in \mathscr{E}_0$ par hypothèse, il résulte de la définition qu'il existe un rang n_0 à partir duquel **tous** les termes de la suite u sont dans l'intervalle $]-1,1[$.
Pour les autres, peu importe qu'ils soient grands ou petits, l'important est qu'ils sont en nombre fini. Posons donc

$$M = \max\{|u_0|, \ldots, |u_{n_o-1}|, 1\}.$$

Pour ce choix de M, il est clair que $M \geq |u_0|$, $M \geq |u_1|$, ..., $M \geq |u_{n_o-1}|$. D'autre part, par construction de l'entier n_0, si $n \geq n_0$, alors $|u_n| \leq 1 \leq M$.
En conclusion, nous avons vérifié que pour **tout** entier $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leq M$. ▲

2.d Stabilités pour le produit

Nous avons vu que $\mathscr{E}_0$ est *stable* par combinaison linéaire, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{E}_0$ reste dans $\mathscr{E}_0$. Qu'en est-il du produit de deux suites de $\mathscr{E}_0$? Comme nous allons le voir, il reste aussi dans $\mathscr{E}_0$. En fait, nous allons même établir un résultat plus fort :

Proposition 7.19.— Soit $u = (u_n)$ et $b = (b_n)$ deux suites de nombres réels.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ (b_n) \text{ est bornée} \\ \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right) \Rightarrow (u \times b)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Démonstration ▽
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme b est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|b_n| \leq M$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$. Comme $u \in \mathscr{E}_0$, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon'$. J'affirme que cet entier n_0 fait le coup !
En effet, soit $n \geq n_0$, alors

$$|u_n.b_n| = |u_n|.|b_n| \leq M.|u_n| < M.\varepsilon' = \varepsilon.$$ ▲

Exercice : Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \dfrac{\sin n - \cos n}{2^n}$. Montrez que u converge vers 0.

Finalement, comme toute suite convergente est bornée, nous en déduisons la stabilité de $\mathscr{E}_0$ pour le produit.

Corollaire.— $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $(u, v) \in \mathscr{E}_0^2 \Rightarrow u \times v \in \mathscr{E}_0$.

2.e Convergence en moyenne de Césarò

Le résultat suivant est *hors-programme*, vous devrez donc non seulement connaître son énoncé mais aussi maitriser sa démonstration ☺ :

Exercice : Théorème de Césarò
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite convergente vers 0. On lui associe la suite de ses moyennes arithmétiques définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrez que v est convergente vers 0.

3 Suites convergentes et suites divergentes vers $\pm\infty$

3.a Suites convergentes vers ℓ

Définition : *Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que u* ***converge vers*** *ℓ si*

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big)}$$

Notation : *on note cette relation $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.*

Commentaires : Si u converge vers ℓ les termes de la suite sont arbitrairement proches de ℓ à partir d'un certain rang.

Remarque : Si vous observez attentivement cette définition, vous noterez que la propriété encadrée, n'est pas vraiment à proprement parler une propriété de u, mais plutôt une propriété de la suite $(u_n - \ell)$. Et que dit cette propriété de la suite $v = u - \ell$? Tout simplement qu'elle est convergente vers 0 !

Proposition 7.20.— Toute petite caractérisation —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbf{R}$.

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ converge vers } \ell \textit{ si et seulement si } \text{il existe } v \in \mathscr{E}_0 \text{ telle que } u = \ell + v.}$$

Commentaires : en clair, une suite est convergente vers $\ell \in \mathbf{R}$ si[12] elle ne diffère de la suite constante égale à ℓ que par une suite convergente vers 0.

Démonstration $\triangledown$

C'est quasi-immédiat d'après la définition. Si u tend vers ℓ, alors comme remarqué plus haut, la suite $v = u - \ell$ est convergente vers 0. Réciproquement, s'il existe $v \in \mathscr{E}_0$ telle que $u = v + \ell$. Alors $u - \ell = v$ appartient à $\mathscr{E}_0$. Par définition de $\mathscr{E}_0$, cela signifie que $u - \ell$ converge vers 0. Mais précisément, c'est dire -vu la remarque ci-dessus - que u converge vers ℓ ! ▲

3.b Suite convergente, divergente

Définition : *Une suite u est dite **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ telle que u converge vers ℓ. Dans le cas contraire, on dit que u est **divergente**.*

Attention : La propriété *u est convergente* est une propriété *existentielle*. Pour démontrer qu'une suite converge, il y a basiquement deux étapes à effectuer, dans l'ordre !

- deviner le *candidat* ℓ,
- démontrer que $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \dfrac{n - 10^{80}}{n}$. Montrez que u est convergente.

Solution $\triangledown$

Lorsque n est très grand, $n - 10^{80}$ est proche de n, de sorte que le quotient est proche de 1. Montrons que u est convergente vers 1.

- *Remarquons que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n - 1 = -\dfrac{10^{80}}{n}$. La suite $(1/n)$ est convergente vers 0. D'après les propriétés de stabilité de $\mathscr{E}_0$, il en résulte que la suite $(10^{80}/n)$ converge aussi vers 0.*
- *Ainsi, comme la suite u ne diffère de la suite constante égale à 1 que d'une suite convergente vers 0, elle est donc convergente vers 1.* ▲

3.c Suites divergentes vers $+\infty$

Définition : *Soit (u_n) une suite de nombres* réels. *On dit que u **diverge vers** $+\infty$ si*

$$\boxed{(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \geq A)\big)}$$

*On dit aussi que u **diverge vers** $-\infty$ si* $(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists n_0 \in \mathbf{N});\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \big((n \geq n_0) \Rightarrow (u_n \leq A)\big)$

Notation : *on note* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Commentaires : une suite u diverge vers $+\infty$ si les termes de la suite sont **arbitrairement** grands à partir d'un certain rang, Ainsi, même si les suites divergentes vers $\pm\infty$ sont divergentes, *i.e.* non convergentes, elles se comportent de manière assez semblable aux suites convergentes, en ce sens que leur comportement lorsque n devient très grand, est bien déterminé.

Exemple : La suite u définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^2 - n$ est divergente vers $+\infty$.

3.d Notion de limite

Théorème 7.21.— Unicité de la limite —. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, $(\ell, \ell') \in \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \bullet\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell' \end{array}\right) \Rightarrow \ell = \ell'}$$

12. et seulement si

Démonstration $\triangledown$
On suppose dans la démonstration que ℓ et ℓ' sont réels. Notons $\delta = |\ell - \ell'|$. D'après les propriétés élémentaires de la valeur absolue, il suffit de démontrer que $\delta = 0$. Pour cela, nous allons démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq \delta \leq \varepsilon$$

En effet, ainsi que nous l'avons prouvé par contraposée au **Chapitre 6** [13], cette propriété entraîne effectivement $\delta = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons que $\delta < \varepsilon$.
Appliquons l'hypothèse u converge vers ℓ avec $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Il existe donc un rang $n_1 \in \mathbf{N}$ à partir duquel tous les termes sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, i.e

$$\forall n \in \mathbf{N} \ (n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon/2)$$

De même comme u est aussi convergente vers ℓ' , il existe donc un rang $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \ (n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon/2)$$

Soit $N = \max\{n_1, n_2\}$. Comme $N \geq n_1$ et $N \geq n_2$, u_N satisfait les deux encadrements $|u_N - \ell| < \varepsilon/2$ et $|u_N - \ell'| < \varepsilon/2$.
Pour estimer la distance δ entre ℓ et ℓ' , utilisons l'**inégalité triangulaire**, il vient :

$$\delta = |\ell - \ell'| = |\ell - u_N + u_N - \ell'| \leq |\ell - u_N| + |u_N - \ell'| < (1/2)\varepsilon + (1/2)\varepsilon = \varepsilon.$$

Ainsi, nous avons démontré que $\delta < \varepsilon$. Comme ε était arbitraire, il s'ensuit que $\delta = 0$, c'est-à-dire $\ell = \ell'$. ▲

En pratique : dans les exercices, nous utiliserons fréquemment ce théorème, notamment lors de l'étude d'une suite récurrente.

D'un point de vue plus théorique, il permet de vérifier que la notion de **limite** est bien définie.

Définition : *Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \bar{\mathbf{R}}$. ℓ est appelée la **limite** de la suite (u_n). On note cette relation*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

4 Propriétés fondamentales des suites possédant une limite

4.a Limite et valeur absolue

Proposition 7.22.— Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite admettant pour limite $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. Alors

La suite $(|u_n|)$ possède une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration $\triangledown$
Nous supposons que $\ell \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme par hypothèse, u est convergente de limite ℓ, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbf{N}), \big(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big).$$

J'affirme que cet entier n_0 *fait le coup !*
En effet, soit $n \geq n_0$ d'après l'**inégalité triangulaire bis**, $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$. Par transitivité de $\leq$, il en résulte que $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$. ▲

4.b Limite finie et bornitude

Théorème 7.23.—

$$\boxed{\text{Toute suite convergente est bornée.}}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit u une suite convergente. Notons ℓ sa limite. D'après la **Proposition** 7.20, il existe $v \in \mathscr{E}_0$ telle que $u = \ell + v$. Comme toute suite convergente de limite nulle est bornée, en particulier v est bornée. D'autre part, il est clair que ℓ est bornée par $|\ell|$. Comme la somme de deux suites bornées est bornée (voir **Généralités sur les suites réelles**), il en résulte que u est bornée. ▲

Remarque : La réciproque est fausse, comme le montrent les deux exemples à suivre de suites divergentes...

Remarque : dans le cas d'une suite (u_n) divergente vers $\pm\infty$, on a un résultat analogue :

13. cf Stratégies pour une implication

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) est minorée.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors (u_n) est majorée.

4.c Limites et inégalités

Proposition 7.24.— Soit u et v deux suites de nombres réels admettant des limites dans $\bar{\mathbf{R}}$.

- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ **alors** $(\exists n_0 \in \mathbf{N})$; $(\forall n \in \mathbf{N})$, $\big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n < v_n\big)$
- **Si** $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Remarques :

- À propos du premier • l'inégalité dans l'hypothèse est **stricte** et il ne peut en être autrement comme le montre l'exemple des suites $(1/n)_{n\geq 1}$ et $\big(2.\frac{(-1)^n}{n}\big)_{n\geq 1}$ toutes deux convergentes de limite nulle, mais non comparables.
- À propos du deuxième • Lorsque $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n < v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et cette conclusion est optimale, comme le montre l'exemple des suites $u = 0$ et $v = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$.

Retenez que : Le passage à la limite **élargit** les inégalités.

Démonstration ▽
Dans la démonstration, nous supposerons que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ sont réels.

1. Supposons que $\ell < \ell'$. Posons $\varepsilon = (1/3)(\ell' - \ell)$. L'hypothèse $\ell < \ell'$ assure que ε est strictement positif ! D'autre part, comme les suites u et v sont convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', il existe des entiers n_1 et n_2 tels que :

$$(\forall n \in \mathbf{N})\ \big(n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\big)$$
$$(\forall n \in \mathbf{N})\ \big(n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon\big)$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, et considérons un entier $n \geq n_0$, de sorte que les deux encadrements ci-dessus soient simultanément valides. Les **inégalités triangulaires** donnent :

$$\begin{array}{rcl} v_n - u_n & = & \ell' - \ell + v_n - \ell' - u_n + \ell \\ & = & (\ell' - \ell) - \big((u_n - \ell) + (\ell' - v_n)\big) \\ & \geq & |\ell - \ell'| - |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \\ & \geq & (\ell' - \ell) - |u_n - \ell| - |v_n - \ell'| \\ & \geq & (1/3)(\ell' - \ell) > 0. \end{array}$$

En particulier, il existe un n_0 tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow u_n < v_n$.

2. Supposons que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$ et montrons par l'*absurde* que $\ell \leq \ell'$. Supposons que $\ell > \ell'$. D'après le 1. (appliqué au couple (v, u) *instead of* (u, v)) il existe en particulier un entier n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$. *Contradiction.* ▲

On utilise très souvent cette proposition lorsque l'une des deux suites u ou v est constante. On obtient notamment le corollaire suivant :

Corollaire 7.25.— Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite possédant une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$, m et M deux réels.

1. **Si** $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq M$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq M$.
2. **Si** $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq m$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq m$.
3. **Si** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n > m$, **alors** u est minorée, à partir d'un certain rang, par m
$$(\exists n_0 \in \mathbf{N}), \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n > m\big)$$
4. **Si** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n < M$, **alors** u est majorée, à partir d'un certain rang, par M
$$(\exists n_0 \in \mathbf{N}), \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n < M\big)$$

5 Caractérisations séquentielles

5.a Caractérisation séquentielle de la densité

Proposition 7.26.— Soit A une partie de R. A est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout réel $\ell \in \mathbf{R}$; il existe une suite d'éléments de A, $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$, telle que $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$.

Démonstration $\triangledown$

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ fixé. On considère l'intervalle ouvert $]\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n}[$. Comme par hypothèse A est dense dans $\mathbf{R}$, cet intervalle rencontre A. On note $a_n \in A \cap]\ell - \frac{1}{n}, \ell + \frac{1}{n}[$. Finalement, nous avons construit ainsi une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers ℓ puisque $|a_n - \ell| \leq \frac{1}{n}$. ▲

5.b Traduction séquentielle de la borne supérieure

Proposition 7.27.— Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

- Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure, notée α. Il existe une suite d'éléments de A, $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$, telle que $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$.
- Si A n'est pas majorée, alors il existe une suite d'éléments de A, $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$, telle que $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

IV Théorèmes d'existence de limite

Cette partie du chapitre rassemble les principaux outils pour l'étude des suites.

1 Suites extraites d'une suite possédant une limite

Proposition 7.28.— Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.
u a pour limite ℓ *ssi* toute suite extraite de u a pour limite ℓ.

Démonstration ▽
Dans la démonstration, nous supposerons que ℓ est réel.
la condition est suffisante : Supposons que toute suite extraite est convergente de limite ℓ. En particulier, comme u est elle-même une suite extraite [14] de u, elle converge vers ℓ.
La condition est nécessaire :

Schéma de preuve : Supposons que u soit convergente de limite ℓ et fixons un intervalle ouvert I contenant la limite. Par hypothèse I contient tous les termes de la suite sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. Comme les termes d'une suite extraite sont en particulier des termes de la suite u, ils sont tous dans I , sauf peut-être quelques rebelles.

La preuve :
Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même. Démontrons tout d'abord le résultat suivant

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

La preuve sera par récurrence :

- **Init.** OK
- **Hér.** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(n) \geq n$. Comme par hypothèse, φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Par transitivité, il s'ensuit que $\varphi(n+1) \geq n+1$.
- **Ccl.** OK

Supposons que u soit convergente de limite ℓ. Montrons à présent que $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge aussi vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$(\forall n \in \mathbf{N}),\ (n \geq n_0) \Rightarrow (|u_n - \ell| \leq \varepsilon). \tag{7.4}$$

J'affirme que si $k \geq n_0$, alors $|u_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$.
En effet soit $k \geq n_0$, d'après le résultat établi ci-dessus, $\varphi(k) \geq n_0$. En particulier, nous pouvons appliquer (7.4) en prenant $n = \varphi(k)$. Il en résulte que $|u_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. ▲

En pratique : • La condition suffisante est sans intérêt pour démontrer qu'une suite est convergente.

- La condition nécessaire est parfois utile pour déterminer le *candidat limite*. Supposons que vous sachiez qu'une suite extraite de u soit convergente de limite ℓ. Alors ℓ est l'unique candidat pour être la limite de u.
- La condition nécessaire est surtout utile pour démontrer qu'une suite diverge. Il suffit [15] en effet
  - ▸ soit d'exhiber une sous-suite divergente de u,
  - ▸ soit d'exhiber deux sous-suites de u convergeant vers des limites différentes

  pour conclure que la suite est divergente.

Exemples : Les suites $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont divergentes.

Voici une version améliorée de la *condition suffisante* de la proposition précédente qui elle, est d'un grand intérêt.

Proposition 7.29.— Existence de limite par complémentarité —. Soit (u_n) une suite de nombres réels, et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \bullet\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right) \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

14. Quelle est la fonction extractrice φ en ce cas ?
15. ***Think different*** : pense à la contraposée !

Démonstration ▽
Dans la preuve, nous supposerons que ℓ est réelle.

Schéma de preuve : Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ. A partir d'un certain rang, tous les termes de rang pair ou impair de la suite u sont dans ℓ . Par conséquent, tous les termes sont dans ℓ à partir d'un certain rang !

Proof : Soit $\varepsilon > 0$, comme (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont convergentes de limite ℓ, il existe

$$\text{un entier } k_1 \text{ tel que } \forall k \in \mathbf{N}, (k \geq k_1 \Rightarrow |u_{2k} - \ell| \leq \varepsilon)$$
$$\text{et un entier } k_2 \text{ tel que } \forall k \in \mathbf{N}, (k \geq k_2 \Rightarrow |u_{2k+1} - \ell| \leq \varepsilon)$$

Posons $n_0 = 2 \times \max\{k_1, k_2\} + 1$, j'affirme que $\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$.
En effet, soit $n \geq n_0$ fixé. Je distingue deux cas suivant la parité de n :

- Si n est pair, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k$. De l'inégalité $n \geq n_0 = 2 \times \max\{k_1, k_2\} + 1$, résulte en particulier que $k \geq k_1$, de sorte que $|u_n - \ell| = |u_{2k} - \ell| \leq \varepsilon$.
- Si n est impair, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Comme précédemment, il découle de l'inégalité $n \geq n_0 = 2 \times \max\{k_1, k_2\} + 1$, que $k \geq k_2$, de sorte que $|u_n - \ell| = |u_{2k+1} - \ell| \leq \varepsilon$.

Dans tous les cas, j'ai bien démontré que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. ▲

2 Existence de limite par opérations algébriques

2.a Cas des suites convergentes

Théorème 7.30.— Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites réelles **convergentes**, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ des réels. Alors

1. La suite $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. La suite $u \times v$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, la suite $\dfrac{1}{v}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{\lim v_n}$.

Commentaires : en ce qui concerne la propriété 3., la suite v n'étant pas supposée *inversible*, la suite $(1/v)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas définie *a priori*. Toutefois, il résulte du **Corollaire** 7.25 (**Limite et inégalités**) qu'à partir d'un certain rang n_0, les termes de la suite v sont tous strictement positifs ou tous strictement négatifs (suivant le signe de la limite). En particulier, $v_n \neq 0$ si $n \geq n_0$. Par conséquent, la suite $\big(1/v\big)_{n \geq n_0}$ est bien définie.

Remarque : Chacune de ces trois propriétés comporte deux conclusions. D'abord la convergence de la suite et ensuite la valeur de sa limite.

Démonstration ▽
Notons ℓ et k les limites respectives des suites u et v. Posons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\tilde{u}_n = u_n - \ell$ et $\tilde{v}_n = v_n - k$. Par définition, les suites $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ appartiennent à $\mathscr{E}_0$. Nous allons déduire le 1. et le 2. du **Théorème** 7.15
1. Remarquons que $\lambda u + \mu v = \lambda \tilde{u} + \mu \tilde{v} + \lambda.\ell + \mu.k$. D'après le **Théorème** 7.15, la suite $\lambda \cdot \tilde{u} + \mu \cdot \tilde{v}$ est élément de $\mathscr{E}_0$. D'autre part, la suite $\lambda\ell + \mu k$ est constante. D'après la **Proposition** 7.20, la suite $\lambda u + \mu v$, étant la somme d'une suite de $\mathscr{E}_0$ et d'une suite constante, converge et a pour limite la valeur de cette constante, c'est-à-dire $\lambda\ell + \mu k$, ce qui prouve le 1.
Pour le 2., remarquons que

$$\begin{aligned} u \times v &= (\tilde{u} + \ell) \times (\tilde{v} + k) \\ &= \underbrace{\tilde{u} \times \tilde{v} + \tilde{u} \times k + \tilde{v} \times \ell}_{=w} + \ell \times k \\ &= w + \ell \times k. \end{aligned}$$

D'après le **Théorème** 7.15, la suite w est convergente vers 0. Ainsi, la suite $u \times v$ s'écrit comme la somme d'une suite convergente de limite nulle et d'une suite constante. Elle est donc convergente de limite $\ell.k$.
Pour le 3. nous utiliserons le **Corollaire** 7.25 et le **Théorème de convergence par comparaison** (**Théorème** 7.13, mais avant tout, j'ai un petit calcul à faire, alors ...

Je fais mon brouillon : Je cherche à majorer

$$|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{k}| = \frac{1}{|k||v_n|}\ |v_n - k|$$

Or d'après le **Corollaire** 7.25, il existe un réel strictement positif δ tel que $|v_n| > \delta$ pour n suffisamment grand. D'où la majoration suivante, valable dès que n est assez grand :

$$|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{k}| \leq \frac{1}{|k|\delta}\ |v_n - k|.$$

Fin du brouillon . . .

Comme $k \neq 0$, il existe, d'après le **Corollaire** 7.25, un réel strictement positif δ et un entier $n_0 \in \mathbf{N}$, tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| > \delta. \tag{7.5}$$

Comme par hypothèse v converge vers k, la suite $\tilde{v} = v - k$ est convergente de limite nulle. Posons $M = \dfrac{1}{|k|\ \delta}$. Pour tout entier $n \geq n_0$, nous déduisons de (7.5) que :

$$|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{k}| \leq \frac{1}{|k|\delta}\ |v_n - k| \leq M\tilde{v}_n$$

Comme la suite $M\tilde{v}$ est convergente de limite nulle, il découle du **Théorème** 7.13, ou plus précisément de son **Corollaire** , que la suite $\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{k}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite nulle, c'est-à-dire que la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite $\dfrac{1}{k}$. ▲

2.b Cas des limites infinies

Je vous rappelle que $\bar{\mathbf{R}}$ est muni des opérations commutatives $+$ et $\times$. Ces opérations ne sont pas définies sur $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ tout entier : certaines opérations ne sont pas définies, ce sont les **formes indéterminées** $+\infty - \infty$, et $0 \times (\pm\infty)$.

Théorème 7.31.— Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$, $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ un nombre réel.

1. **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.
2. **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda.\ell$.
3. **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{\ell}$, avec la convention que $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$.
4. **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, **alors** [22] $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
5. **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, **alors** [16] $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$.

lorsque ces opérations ont un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Remarques : a propos du :

1. On convient que $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$.
2. On applique ici la règle des signes : par exemple $(-2) \times (-\infty) = +\infty$.
3. Lorsque $\ell = 0$, on ne peut rien déduire en ce qui concerne la suite u^{-1}. Il suffit pour s'en convaincre de considérer les trois exemples suivants :
   Que dire de la suite u^{-1} lorsque u est définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = 1/n$, $u_n = -1/n$ ou $u_n = (-1)^n/n$?
4. Lorsqu'on *tombe* sur la forme indéterminée $+\infty - \infty$, c'est-à-dire lorsque $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$, on ne peut rien dire du comportement de la suite somme comme le montrent les exemples suivants :
   Que dire de la suite $u+v$ lorsque u et v sont définies par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$ et $v_n = -n$, $u_n = n^2$ et $v_n = -n$ ou encore $u_n = n$ et $v_n = -n^2$?

16. si cette opération a un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

5. Lorsqu'on *tombe* sur la forme indéterminée $0 \times \infty$, c'est-à-dire lorsque $\ell = 0$ et $\ell' = +\infty$, on ne peut rien dire du comportement de la suite produit comme le montrent les exemples suivants :
Que dire de $u \times v$ lorsque u et v sont définies par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = 1/n$ et $v_n = n$, $u_n = (1/n^2)$ et $v_n = n$ ou bien $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$?

Remarque finale : les exemples donnés à la remarque 4 et 5 montrent que **la connaissance des valeurs des limites** dans $\bar{\mathbf{R}}$ des suites u et v **ne suffit pas toujours** pour **déterminer** la limite éventuelle de la suite somme ou la suite produit. Sur les exemples traités, on peut remarquer que la connaissance de la *vitesse de convergence* peut aider à *lever cette indétermination*. Pour cela les suites de références étudiées au prochain chapitre seront très utiles.

Démonstration ▽
Je ne traite que du cas de limites infinies.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, u_n est positif à partir d'un certain rang et donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Soit $M \in \mathbf{R}^+$, par définition, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_n \leq -M$ si $n \geq n_0$. J'en déduis que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \geq M$.

2. Supposons que $\lambda > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Soit $M \in \mathbf{R}^+$. Par définition, il existe un entier n_0 tel que $u_n \leq -\frac{M}{\lambda}$ si $n \geq n_0$. En utilisant la compatibilité de l'ordre avec la multiplication, j'en déduis que $\forall n \geq n_0$, $\lambda u_n \leq -M$.

3. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, et montrons que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right) = 0$:
Soit $\varepsilon > 0$. D'après le 1., $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. Par définition, il existe donc un rang n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $|u_n| \geq \varepsilon^{-1}$. Passant aux inverses, nous obtenons pour tout $n \geq n_0$ la majoration : $|u_n|^{-1} \leq \varepsilon$.

4. Si $\{\ell, \ell'\} = \{+\infty, -\infty\}$, la somme $\ell + \ell'$ n'est pas définie.

- **a.** Supposons par exemple que $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbf{R}$ et démontrons que la suite somme est convergente de limite $+\infty$:
Soit $M \in \mathbf{R}^+$. La suite v étant convergente par hypothèse, elle est bornée d'après la **Proposition** 7.23. Soit $A \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|v_n| \leq A$. Comme par hypothèse, u est divergente de limite $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A + M$. En particulier, par définition de la valeur absolue, nous obtenons pour tout entier $n \geq n_0$ la minoration :
$$u_n + v_n \geq u_n - |v_n| \geq u_n - A \geq M.$$
- **b.** Supposons que $\ell = \ell' = +\infty$. En ce cas, étant donné $M \in \mathbf{R}$ il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq (1/2)M$ et $v_n \geq (1/2)M$. Par compatibilité de l'ordre avec l'addition, il en résulte que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $u_n + v_n \geq M$.

5. Si $\{\ell, \ell'\} = \{0, -\infty\}$ ou $\{\ell, \ell'\} = \{0, +\infty\}$, le produit $\ell \times \ell'$ n'est pas défini.
Supposons que $\ell = +\infty$ et $\ell' \in [-\infty, 0[$. D'après la **Proposition** 7.25, il existe un réel positif $\delta > 0$ et un entier n_1 tels que : $\forall n \geq n_1,\ v_n \leq -\delta$.
Soit $M \in \mathbf{R}^+$, puisque u diverge vers $+\infty$ il existe un entier n_2 tel que $u_n \geq (1/\delta)M$ dès que n est supérieur ou égal à n_2. Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Je déduis des propriétés de compatibilité de l'ordre avec la multiplication que
$$\forall n \geq n_0,\ u_n \times v_n \leq (1/\delta)M \times v_n \leq (-1) \times M.$$

▲

Le théorème précédent ne permet pas de connaître la comportement de la suite $1/u$ lorsque u est une suite convergente de limite nulle comme le montre l'exemple donné en remarque. On voit bien sur cet exemple que tout dépend de la positivité éventuelle de u. Ceci conduit à poser la définition suivante :

Définition : *Soit u une suite de nombres réels.*

1. *On dit que u* ***tend vers*** *0* ***par valeurs positives****, et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, si u est convergente vers 0 et strictement positive à partir d'un certain rang.*

2. *On dit que u* ***tend vers*** *0* ***par valeurs négatives****, et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$, si u est convergente vers 0 et strictement négative à partir d'un certain rang.*

Proposition 7.32.— Soit u une suite de nombres réels convergente de limite nulle.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$.

Démonstration ▽
1. Supposons, sans perte de généralité que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$. Soit $M \in \mathbf{R}^+$ fixé. Comme par hypothèse u est convergente de limite nulle, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite u vérifient $0 < u_n \leq \frac{1}{M}$. Passant aux inverses, nous obtenons la minoration désirée.
2. Il suffit d'appliquer le 1. à la suite $-u$, puis d'utiliser la partie 2. du **Théorème** 7.31. ▲

3 Existence de limite par comparaison et encadrement

3.a Comparaison (limite nulle)

Rappelons le **théorème fondamental** en ce contexte :

Théorème 7.33.— Convergence par comparaison —. Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels.

Si $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \bullet\ \forall n \in \mathbf{N},\ |v_n| \leq |u_n| \end{array}\right)$ **alors** v est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3.b Comparaison (limites infinies)

Le théorème qui suit est la version pour les *suites divergentes vers* $+\infty$ du **Théorème** précédent :

Théorème 7.34.— Divergence par comparaison —. Soit $u, v \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels.

Si $\left.\begin{array}{l} \bullet \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ \bullet\ \forall n \in \mathbf{N},\ v_n \geq u_n \end{array}\right)$ **alors** v est divergente vers $+\infty$

Démonstration ▽
Soit $A \in \mathbf{R}$. Comme u est divergente vers $+\infty$, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbf{N}\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$. Soit $n \geq n_0$ alors par hypothése $v_n \geq u_n$. Par transitivité de l'ordre, il en résulte que $v_n \geq A$. ▲

Remarque : Il y a bien sûr un résultat analogue pour les suites divergentes vers $-\infty$.

3.c Encadrement

En ce qui concerne les suites convergentes de limite ℓ, nous disposons du théorème suivant souvent appelé le **Théorème des gendarmes**.

Théorème 7.35.— Convergence par encadrement —. Soit $u, v, w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ trois suites de nombres réels et $\ell \in \mathbf{R}$ un réel.

Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u \text{ et } w \text{ convergent vers } \ell. \\ \bullet\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n \end{array}\right)$ **alors** v est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Commentaires : ce **Théorème des gendarmes** n'est pas un corollaire de la **Proposition** 7.24, car ici on **ne suppose pas** la convergence de la suite v. Au contraire, c'est une partie de la **conclusion**.

Démonstration ▽
Par hypothèse, je sais que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell$. En particulier

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |v_n - \ell| \leq \max\{|u_n - \ell|, |w_n - \ell|\} \leq |u_n - \ell| + |w_n - \ell|$$

Or par hypothèse les suites u et w convergent vers ℓ, c'est-à-dire d'après la **Proposition** 7.20 que les suites $u - \ell$ et $v - \ell$

appartiennent à $\mathscr{E}_0$. Par conséquent, la suite $|u-\ell|+|w-\ell|$ est encore, d'après le **Théorème**7.15 convergente de limite nulle. Le **Théorème** 7.13 montre alors que $v-\ell \in \mathscr{E}_0$. ▲

Exercice : Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.

1- Encadrez S_n.
2- En déduire qu'elle est convergente, et déterminez sa limite.
3- Mêmes questions avec la suite $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

Solution ▽

Soit (S_n) la suite définie pour $n \in \mathbf{N}^\star$ par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.

1. *Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ fixé. Pour encadrer S_n, nous procédons en deux étapes :*

- *nous obtenons d'abord un encadrement du k ième terme de cette somme :*
  Soit $k \in [\![1,n]\!]$, par compatibilité de l'ordre, je déduis des inégalités $1 \leq k \leq n$ que

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

- *En sommant terme à terme ces encadrements, nous obtenons finalement*

$$\frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

2. *Introduisons les suites $u_n = \dfrac{n}{n^2+n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $w_n = \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n^2+1}$. Comme pour tout entier naturel non nul $u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et $w_n \leq \dfrac{1}{n}$, il résulte du théorème de convergence par comparaison que u et w sont toutes deux convergentes vers 0. D'après le théorème de convergence par encadrement, il en résulte que (S_n) est convergente de limite 0.*

3. *Remarquons que $T_n = nS_n$. Par conséquent, T_n vérifie l'encadrement*

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq T_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

Notons $U_n = \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $W_n = \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$. Comme les suites $\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{1}{n^2+1}$ sont convergentes vers 0, les suites encadrantes U et V sont convergentes et de même limite 1. Par le théorème de convergence par encadrement, il en résulte que la suite (T_n) est convergente de limite 1. ▲

4 Limite des suites monotones

Rappelez-vous que pour démontrer que u *est convergente* il faut -basiquement-

- deviner un *candidat limite* ℓ, et ensuite
- montrer que $u-\ell$ est une suite de $\mathscr{E}_0$.

L'intérêt majeur des théorèmes qui suivent est de s'affranchir de la première étape. En effet, contrairement aux **Théorèmes de convergence** 7.30 et 7.35 , ces théorèmes permettent de démontrer la convergence d'une suite en n'ayant **aucune idée** *a priori* du **candidat limite** ! Ils s'avèrent particulièrement utiles pour démontrer par exemple qu'une suite définie par une somme est convergente, et nous en verrons des exemples.
Une autre manière de voir les choses est de se rappeler que la propriété u *est convergente* est une propriété **existentielle**. Or, dans les deux théorèmes qui suivent, on ne fait **aucune** hypothèse de type **existentiel**...
L'existence de la limite découle donc d'un autre résultat de type existentiel du cours :
la **Propriété de la Borne Supérieure** bien sûr !

4.a Cas des suites monotones bornées

Nous avons vu que toute suite convergente est bornée, mais que la réciproque est fausse [17]. Il existe un cas particulier très important pour lequel la réciproque est vraie : il s'agit des suites monotones :

17. considérer par exemple la suite $(-1)^n$

Théorème 7.36.— Théorème de la limite monotone —. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite **monotone**. Alors

$$\boxed{u \text{ est convergente } \textit{si et seulement si } \ u \text{ est bornée.}}$$

Plus précisément

- **Si** u est croissante et majorée, **alors** u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$
- **Si** u est décroissante et minorée, **alors** u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$

En pratique : N'oubliez pas que le théorème de la limite monotone donne la convergence, mais aussi la limite de la suite (u_n).

Démonstration ▽

Supposons que u soit croissante et majorée. Considérons la partie $A = \{u_n;\ n \in \mathbf{N}\}$. Clairement A est non vide. De plus par hypothèse elle est majorée. D'après le **Théorème** 7.2 elle possède donc une borne supérieure, *let's call it* ℓ. J'affirme que u est convergente de limite ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure (**Théorème** 7.3), $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$ [18]. La suite u étant monotone, j'en déduis que

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > \ell - \varepsilon.$$

D'un autre coté, comme ℓ est un majorant de A, je sais que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq \ell.$$

Soit $n \geq n_0$, je déduis des deux inégalités ci-dessus que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$, en particulier $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. ▲

Corollaire 7.37.— Soit u une suite décroissante de réels convergeant vers 0. Alors u est positive [19].

Commentaires : ce résultat est très naturel, *si la suite tend vers 0 en descendant, c'est qu'elle est positive !*

Démonstration ▽

D'après le théorème ci-dessus, $0 = \inf_n u_n$. En particulier, 0 minore $\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. ▲

Exercice :

1. Est-il exact de dire que toute suite décroissante et positive converge ?

Solution ▽

OUI ! le fait qu'une suite soit positive signifie tout simplement qu'elle est minorée par 0 ! ▲

Quelle est alors sa limite ?

Solution ▽

Sa limite est sa **borne inférieure**, *qui n'est pas nécessairement 0. Qui peut croire que la suite constante égale à 1 converge vers 0 ?* Personne ! ▲

2. Est-il exact de dire que toute suite positive et convergente vers 0 est décroissante ?

Solution ▽

NON ! par exemple considérons la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ est pair} \\ 1/n & si \quad n \text{ est impair} \end{cases},$$

en ligne, *la suite u est donnée par* $(0, 1, 0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/7, 0, \dots)$

La suite u est clairement positive, elle est aussi convergente de limite 0 car ses suites extraites formées des termes de

18. Sinon, $\ell - \varepsilon$ serait un majorant de A strictement inférieur à ℓ, et puis quoi encore !
19. i.e. $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 0$.

rangs pairs et impairs sont des exemples célèbres de[20] *suites de $\mathscr{E}_0$, mais u n'est pas décroissante -ni même monotone- puisque $u_0 < u_1$, $u_2 < u_1$, $u_3 > u_2$,* etc. . . ▲

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ une suite bornée de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \qquad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

1. Montrez que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge.

2. Montrez que (v_n) est convergente de limite nulle.

4.b Limites monotones dans $\overline{\mathbf{R}}$

En ce qui concerne les suites monotones, le **Théorème** 7.36 possède une version *achevée* :

Théorème 7.38.—

1. Soit u un suite **croissante** de nombres réels.

- **a.** Si u est majorée (dans $\mathbf{R}$), alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$.
- **b.** Si u n'est pas majorée alors u est divergente vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit u un suite **décroissante** de nombres réels.

- **a.** Si u est minorée (dans $\mathbf{R}$), alors u est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$.
- **b.** Si u n'est pas minorée alors u est divergente vers $-\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque : Si u est une suite croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{\overline{\mathbf{R}}} u_n$.

Démonstration ▽

Soit u une suite croissante et non majorée dans $\mathbf{R}$. Je montre que la suite u est divergente vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbf{R}$. La suite u étant non majorée par hypothèse, A ne risque pas d'être un majorant de u. Par définition, ceci signifie qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$. La suite u étant croissante, il en résulte immédiatement que : $\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow u_n \geq A$. ▲

Commentaires : ce théorème montre que **le comportement des suites monotones est parfaitement connu**, en théorie au moins. Dans un monde de suites idéales, toutes les suites seraient monotones, malheureusement[21] ce n'est absolument pas le cas !

Exercice : Soit (u_n) la suite définie par

- $u_0 > 0$
- $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$

1. Montrez que (u_n) est bien définie, à valeurs positives.

2. Montrez que (u_n) est croissante.

3. Montrez que (u_n) diverge vers $+\infty$.

5 Convergence des suites adjacentes

5.a Définition des suites adjacentes

Définition : *Soit $(u, v) \in (\mathbf{R}^{\mathbf{N}})^2$. Les suites u et v sont dites* ***adjacentes*** *si*

- *l'une est croissante et l'autre décroissante.*
- *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite nulle.*

En pratique : pour prouver que deux suites sont adjacentes vous montrez

20. suites extraites de
21. ou heureusement, c'est au choix

- l'une est croissante,
- l'autre est décroissante,
- la différence des deux est convergente vers 0.

Exemple : On définit pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Vérifions que ces deux suites sont adjacentes.

5.b Convergence des suites adjacentes

Théorème 7.39.— Convergence des suites adjacentes —. Soit u et v deux suites **adjacentes**.

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont convergentes et ont même limite.}}$$

Démonstration $\triangledown$
Supposons que u soit croissante, v décroissante et que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. D'après les propriétés des suites monotones, la suite $v-u$ est décroissante de limite nulle. D'après le précédent **Corollaire** , il s'ensuit que $v-u$ est positive, *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n - u_n \geq 0. \tag{7.6}$$

D'après (7.6), nous avons

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi, la suite u étant croissante et majorée par v_0, elle converge d'après le **Théorème** 7.36 vers une limite ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0, elle converge vers une limite ℓ' .
Par opérations algébriques sur des suites convergentes, il en résulte d'une part que $(v_n - u_n)$ est convergente de limite $\ell' - \ell$. D'autre part, nous savons par hypothèse que cette suite est convergente de limite nulle. Par unicité de la limite, il en résulte que $\ell = \ell'$. ▲

Corollaire 7.40.— Soit u et v deux suites adjacentes. On suppose que $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$. Soit $\ell \in \mathbf{R}$ leur limite commune, alors

$$\boxed{\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ u_n \leq \ell \leq v_p}$$

Commentaires : en clair leur limite commune sépare deux suites adjacentes. Un petit dessin serait le bienvenu !

Démonstration $\triangledown$
D'après le **Théorème** 7.36 $\ell = \sup_n u_n$ et $\ell = \inf_p v_p$. Par conséquent $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq \ell$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n \geq \ell$. ▲

En pratique : l'intérêt majeur du **Théorème** 7.39 est qu'il permet de démontrer la convergence de suites dont on a absolument **aucune** idée de la limite éventuelle. Il est donc particulièrement utile pour l'étude des suites définies par des sommes. Pour illustrer ce fait, reprenons l'exemple précédent :

Exemple : On définit pour $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. D'après l'exemple précédent les suites extraites de (S_n) formées des termes de rangs pairs et impairs sont adjacentes. Comme telles elles sont donc convergentes et de même limite. Par complémentarité, il en résulte que la suite (S_n) elle-même est convergente vers leur limite commune. On peut montrer que cette limite est $\frac{\pi}{4}$. On note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

6 Applications des suites adjacentes

6.a Approximation décimale des nombres réels

Associées à tout nombre réel x, nous avons construit au **Chapitre 1** deux suites de nombres décimaux notées (p_n) et (q_n). Plus précisément :

$$p_n = \frac{\mathsf{Ent}(10^n x)}{10^n} \text{ et } q_n = p_n + 10^{-n}.$$

Proposition 7.41.— Les suites (p_n) et (q_n) ainsi définies sont adjacentes et leur limite commune est x.

Montrons que la suite (p_n) est croissante et que la suite (q_n) est décroissante.

Lemme 7.42.— Soit $y \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}^\star$, alors

$$0 \leq \lfloor ky \rfloor - k\lfloor y \rfloor \leq k - 1.$$

Démonstration du Lemme $\triangledown$.
Par définition de la partie entière, nous avons :

$$\begin{aligned} ky - 1 < \quad & \lfloor ky \rfloor \quad \leq ky \\ k(y-1) < \quad & k.\lfloor y \rfloor \quad \leq ky. \end{aligned}$$

Par les propriétés de compatibilité de l'ordre avec les opérations de $\mathbf{R}$, nous en déduisons que $-1 < \lfloor ky \rfloor - k\lfloor y \rfloor < k$. Le résultat en découle car $\lfloor ky \rfloor - k\lfloor y \rfloor \in \mathbf{N}$. ▲

Démonstration $\triangledown$
Appliquons ce lemme avec $y = 10^n x$, et $k = 10$, il vient

$$0 \leq \lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10 - 1.$$

Divisons cet encadrement par 10^{n+1}, nous obtenons

$$0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 10^{-n} - 10^{-n-1}.$$

Nous en déduisons finalement que $\left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} \geq p_n \\ q_{n+1} \leq q_n \end{array} \right.$. Ce qui prouve que (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.
De plus, comme $p_n - q_n = 10^{-n}$, les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. D'après le **Théorème** 7.40 les suites p et q convergent vers un même nombre ℓ. Montrons que $\ell = x$.
Par définition des suites p et q, nous avons pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $p_n \leq x < q_n$. Comme $\ell = \sup p_n = \inf q_n$, ℓ vérifie aussi pour tout entier n l'encadrement $p_n \leq \ell \leq q_n$. Par conséquent

$$|x - \ell| \leq q_n - p_n = 10^{-n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Ce qui prouve que $x = \ell$. ▲

Corollaire 7.43.— Tout nombre réel est la limite commune de deux suites adjacentes de nombres décimaux.

Remarque : en particulier, tout nombre réel est la limite d'une suite croissante et d'une suite décroissante de nombres rationnels. Il s'agit d'une reformulation de la densité des rationnels.

6.b Construction de suites adjacentes par dichotomie

Principe de la méthode : La dichotomie est un procédé utile pour établir des **théorèmes d'existence** dans $\mathbf{R}$. Comme son nom l'indique, le *principe de la dichotomie* peut se résumer ainsi :
Si nous devons démontrer qu'un segment $[a, b]$ possède un élément c vérifiant certaine propriété $\mathcal{P}$, considérons le milieu m de $[a, b]$. L'un des deux sous-segments $[a, m]$ ou $[m, b]$ doit posséder un tel point [22]. En choisissant un tel sous-segment, nous sommes ramenés à rechercher un point vérifiant $\mathcal{P}$ mais dans un domaine de recherche

22. sans quoi le théorème d'existence serait mis en défaut !

réduit de moitié.
En réitérant ce processus, nous nous ramenons successivement à chercher notre candidat dans des segments $[a_n, b_n]$ emboîtés les uns dans les autres dont les *diamètres* $(b_n - a_n)$ forment une suite convergente de limite nulle...
Les suites (a_n) et (b_n) ainsi construites sont adjacentes et par conséquent, notre domaine de recherche se réduit à la limite réduit à un seul point ... ce qui facilite grandement les recherches!!

Mise en œuvre
L'exemple suivant illustre cette méthode :

Exercice : Un théorème d'existence de point fixe
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction croissante. Montrez qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\boxed{f(c) = c}$$

Solution $\triangledown$
Avant tout, il convient de remarquer que f étant définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$, $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Les cas où $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ étant triviaux, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $f(a) > a$ et $f(b) < b$.

✓ *Situation initiale :*
Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, de sorte que $f(a_0) > a_0$, $f(b_0) < b_0$ et on cherche $c \in [a_0, b_0]$ tel que $f(c) = 0$.

✓ *Première division :*
Considérons le milieu $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ du segment $[a_0, b_0]$. Deux cas se présentent :

- *si $f(c_0) > c_0$, posons $\left\{\begin{array}{lcl} a_1 & = & c_0 \\ b_1 & = & b_0 \end{array}\right.$ de sorte que*

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0,\ f(a_1) > a_1, f(b_1) \leq b_1, \quad \text{et } |a_1 - b_1| = \frac{a_0 - b_0}{2}$$

- *si $f(c_0) \leq c_0$, posons $\left\{\begin{array}{lcl} a_1 & = & a_0 \\ b_1 & = & c_0 \end{array}\right.$ de sorte que*

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0\ f(a_1) > a_1, f(b_1) \leq b_1, \quad \text{et } |a_1 - b_1| = \frac{a_0 - b_0}{2}$$

A la fin de cette première étape, nous avons construit un segment $[a_1, b_1]$ vérifiant les **mêmes conditions** *que le segment $[a, b]$:*

f induit une application $f : [a_1, b_1] \to [a_1, b_1]$ croissante,

mais de **plus** *l'intervalle a été divisé en deux :*

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0 \text{ et } |a_1 - b_1| = \frac{a_0 - b_0}{2}$$

✓ *On recommence le même procédé appliqué cette fois au segment $[a_1, b_1]$.*
Comme précédemment, on considère le milieu c_1 du segment $[a_1, b_1]$. On distingue deux cas :

- *si $f(c_1) > c_1$: dans ce cas, c_1 remplacera avantageusement a_1. On pose donc $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.*
- *si $f(c_1) \leq c_1$: dans ce cas, on pose $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$.*

À la fin de cette deuxième étape, nous avons construit un segment $[a_2, b_2]$ vérifiant les **mêmes conditions** *que le segment $[a, b]$:*

f induit une application $f : [a_2, b_2] \to [a_2, b_2]$ croissante,

mais de **plus** *l'intervalle a encore été divisé en deux :*

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0 \text{ et } |a_2 - b_2| = \frac{a_1 - b_1}{2} = \frac{a_0 - b_0}{2^2}$$

✓ *Ainsi de suite, on construit de proche en proche deux suites (a_n) et (b_n) telles que :*

(a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \leq f(a_n) \quad \text{et} \quad f(b_n) \leq b_n$$

✓ *Les suites (a_n) et (b_n) précédemment construites sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite. Let's call it c !*
Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $c \in [a_n, b_n]$, i.e. $a_n \le c \le b_n$. Par croissance de f, j'en déduis que $f(a_n) \le f(c) \le f(b_n)$. Comme de plus $a_n \le f(a_n)$ et $b_n \ge f(b_n)$, j'en déduis par transitivité de l'ordre que

$$a_n \le f(c) \le b_n$$

Finalement, par compatibilité du passage à la limite dans une inégalité, j'en déduis que $c \le f(c) \le c$, ce qui prouve que c est un point fixe de f. ▲

7 Théorème de Bolzano-Weierstraß

Une suite convergente est nécessairement bornée. Toutefois la réciproque est fausse en général. Le théorème suivant, montre une réciproque affaiblie :

Théorème 7.44.— Théorème de Bolzano-Weierstraß —. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément,

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une **suite bornée** de nombres réels. Il existe $\ell \in \mathbf{R}$ et $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, une application strictement croissante, telles que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = \ell}$$

Commentaires : en clair, si un segment contient une infinité de termes la suite (u_n), ces termes doivent s'accumuler sur au moins une valeur.

Démonstration ▽

■**Première étape :**Partant de l'interprétation ci-dessus du théorème de Bolzano-Weierstraß, nous allons construire une suite dichotomique d'intervalles contenant une infinité de termes de la suite. On construit par récurrence une suite de segments $S_n = [a_n, b_n]$ tels que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, les conditions suivantes (C_n) soient vérifiées :

(C_n)
- $a_0 \le \dots \le a_n < b_n \le \dots \le b_0$
- $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$
- $I_n = \{k \in \mathbf{N} \mid u_k \in S_n\}$ est infini.

Initialisation : pour $n = 0$, la suite (u_n) étant bornée, elle admet une borne sup et une borne inf. Notons $a_0 = \inf u_n$ $b_0 = \sup u_n$, de sorte que $I_0 = \mathbf{N}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, , b_n$ tels que les conditions (C_n) soient vérifiées.
Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ le milieu du segment S_n. Comme par hypothèse de récurrence, $S_n = [a_n, c_n] \cup [c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n), l'un des deux demi-segments contient une infinité de termes de la suite :

- si $[a_n, c_n]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose
  → $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$ et $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
- sinon, $[c_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose
  → $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $S_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Dans les deux cas, nous avons

- $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$
- $I_{n+1}\{k \in \mathbf{N} \mid u_k \in S_{n+1}\}$ est infini

Conclusion : par récurrence, nous avons construit une suite de segments $S_n = [a_n, b_n]$ tels que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, les conditions (C_n) sont vérifiées.

■**Deuxième étape :** pour extraire une sous-suite de (u_n), on construit une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_{\varphi(k)} \in S_k.$$

On construit par récurrence une suite $(\varphi(k))$ strictement croissante d'entiers telle que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$,

- $\varphi(0) < \dots < \varphi(k)$

- $u_{\varphi(k)} \in S_k$.

Initialisation : posons $\varphi(0) = 0$.
Hérédité : soit $k \in \mathbf{N}$ tel que les deux conditions précédentes sont vérifiées. Comme I_{k+1} est infini, il n'est pas majoré. En particulier, $\varphi(k)$ ne majore pas I_{k+1}. Par conséquent, il existe un entier $n \in I_{k+1}$ tel que $\varphi(k) < n$. Posons $\varphi(k+1) = n$. Ainsi,

- $\varphi(k+1) > \varphi(k) > \cdots > \varphi(0)$.
- $u_{\varphi(k+1)} \in S_{k+1}$.

Conclusion : par récurrence, on a construit une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad u_{\varphi(k)} \in S_k.$$

Troisième Etape : d'après les résultats de la première étape, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. D'après le théorème de convergence des suites adjacentes, elles sont convergentes et de même limite. Notons ℓ leur limite commune.
D'après les résultats de la deuxième étape, nous avons l'encadrement, valide pour tout entier $k \in \mathbf{N}$,

$$a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$$

Comme les suites (a_k) et (b_k) sont convergentes de limite ℓ, il découle du théorème de convergence par encadrement que la suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k \in \mathbf{N}}$, extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente de limite ℓ. ▲

V Appendice : suites de nombres complexes

1 Définition, exemple

Définition : *Une suite z de nombres complexes est une application $z : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$. On la note plutôt $z = (z_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

Notation : $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *désigne l'ensemble des suites de nombres complexes.*

Exemple : Soit $(a, q) \in \mathbf{C}^2$. La suite géométrique $(aq^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres complexes.

2 Opérations sur les suites de nombres complexes

En plus des opérations classiques sur les suites (somme, produit, quotient, module), nous pouvons définir

Définition : *Soit $z = (z_n)$ une suite complexe. On appelle **partie réelle** de (z_n) (resp. **partie imaginaire** de (z_n)) la suite réelle de terme général $\mathfrak{Re}\, z_n$ (resp. $\mathfrak{Im}\, z_n$). Ainsi,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_n = \mathfrak{Re}\, z_n + i\mathfrak{Im}\, z_n$$

Définition : *Soit $z = (z_n)$ une suite complexe. La suite conjuguée de (z_n) est définie par*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \bar{z}_n = \mathfrak{Re}\, z_n - i\mathfrak{Im}\, z_n$$

Définition : *Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que z **est bornée**, s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |z_n| \leq M$$

Remarque : les notions de suite majorée (ou minorée), de suite croissante (ou décroissante) n'ont aucun sens dans ce contexte.

On peut traduire la bornitude d'une suite complexe à l'aide de ses parties réelles et imaginaires. Il suffit de se rappeler le **Lemme** 2.12 :

Lemme.— Pour tout nombre complexe $z = x + iy \in \mathbf{C}$ présenté sous forme algébrique

$$\boxed{\max\{|x|, |y|\} \leq |z| \leq |x| + |y|}$$

Il en résulte immédiatement qu'une suite (z_n) est bornée si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.

Démonstration ▽

D'après l'inégalité triangulaire (pour le module), nous avons d'une part $|z| = |x + iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|$.
D'autre part, $|z|^2 = x^2 + y^2 \geq \max\{x^2, y^2\} = \max\{|x|, |y|\}^2$. Par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbf{R}^+$, il s'ensuit que $|z| \geq \max\{|x|, |y|\}$. ▲

3 Convergence d'une suite de nombres complexes

Définition : *Soit (z_n) une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$. On dit que (z_n) est convergente vers ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbf{N})\ (\forall n \in \mathbf{N})\big(n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - \ell| \leq \varepsilon\big)$$

Proposition 7.45.— Soit (z_n) une suite de nombres complexes.

(z_n) est convergente de limite ℓ
si et seulement si
la suite de nombre réels positifs $(|z_n - \ell|)$ est convergente de limite nulle.

En pratique : cette *petite caractérisation* permet de se ramener à l'étude d'une suite de nombres positifs.

Exemple : si $|q| < 1$, alors, la suite géométrique (aq^n) est convergente de limite nulle.

Exercice : Etant donné $u_0 \in \mathbf{C}$, étudiez la convergence de la suite définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2\,\bar{u}_n)$$

Théorème 7.46.— Convergence des parties réelles et imaginaires
Soit (z_n) une suite de nombres complexes et $\ell \in \mathbf{C}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{Re}\, z_n = \mathfrak{Re}\, \ell \\ \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{Im}\, z_n = \mathfrak{Im}\, \ell \end{cases}}$$

Démonstration $\triangledown$

- si (z_n) est convergente vers ℓ, le lemme 2.12 donne par exemple :

$$|\mathfrak{Re}\, z_n - \mathfrak{Re}\, \ell| \leq |z_n - \ell|$$

D'après la *petite caractérisation*, la suite de nombres réels $(|z_n - \ell|)$ est convergente de limite nulle. Par comparaison, entre suite de nombres réels, il en résulte que la suitez $(\mathfrak{Re}\, z_n)$ est convergente de limite $\mathfrak{Re}\, \ell$.

- si les suites $(\mathfrak{Re}\, z_n)$ et $(\mathfrak{Im}\, z_n)$ sont convergentes de limites respectives $\mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, \ell$, alors, toujours d'après le **Lemme ??**, nous avons

$$|z_n - \ell| \leq |\mathfrak{Re}\, z_n - \mathfrak{Re}\, \ell| + |\mathfrak{Im}\, z_n - \mathfrak{Im}\, \ell|$$

Par hypothèse, les suites de nombres réels de termes généraux $|\mathfrak{Re}\, z_n - \mathfrak{Re}\, \ell|$ et $|\mathfrak{Im}\, z_n - \mathfrak{Im}\, \ell|$ sont convergentes de limite nulle. Par OPA, leur somme est donc aussi convergente de limite nulle. Enfin, par comparaison entre suites de nombres réels positifs, il s'ensuit que $|z_n - \ell|$ est convergente de limite nulle. D'après la **petite caractérisation**, c'est dire précisément que la suite (z_n) est convergente de limite ℓ. ▲

En pratique : cette caractérisation permet de se ramener à l'étude de deux suites de nombres réels.

Corollaire 7.47.— Soit (z_n) une suite de nombres complexes. **Si** (z_n) est convergente **alors** elle est bornée.

Exercice : Bolzano-Weierstraß
Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Montrez que (z_n) admet une suite extraite convergente.

4 Opérations sur les suites convergentes

À l'aide de la caractérisation par les parties réelle et imaginaire d'une suite convergente de nombres complexes, on déduit du **Théorème** 7.30

Théorème 7.48.— opérations algébriques
Soit $(z, w) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ deux suites complexes **convergentes**, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ des complexes. Alors

1. La suite $(\bar{z}_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \bar{z}_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n}$

2. La suite $\lambda \cdot z + \mu \cdot w$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot z_n + \mu w_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} z_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

3. La suite $z \times w$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} (z_n . w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \neq 0$, la suite $\dfrac{1}{w}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{w_n}\right) = \dfrac{1}{\lim w_n}$.

Exercice : Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, on définit la suite (z_n) par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad z_n = e^{in\theta}$$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|z_{n+1} - z_n| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$

2. Déduisez-en que (z_n) diverge.

3. Finalement montrez que les suites $(\sin n\theta)$ et $(\cos n\theta)$ sont toutes deux divergentes.