PROGRAMME DE COLLE S29

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FORMULES DE TAYLOR

■■■ Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition : *Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. On appelle* ***polynôme de Taylor*** *de f en a de degré inférieur ou égal à n, le polynôme T_n défini par :*

$$\boxed{T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.}$$

■■■ Formules de Taylor

Théorème.— Formule de Taylor avec reste intégrale
Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, et $a \in I$. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Savoir-faire : utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale pour obtenir des encadrements du reste :

Exercice 5 : Formule de Taylor-Lagrange
Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a, b]$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}}$$

Remarque : lorsque $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, i.e. $n = 0$, c'est l'égalité des accroissements finis $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.

Théorème.— Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$, $a \in I$ et $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall t \in I,\ \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k \right| \leq M\ \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Savoir-faire : utiliser les inégalités de Taylor-Lagrange pour montrer la convergence de "séries", des suites dont le terme général est $S_n = \sum_0^n u_k$:

Théorème.— Formule de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant a. Alors

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)}$$