TECHNIQUES & MÉTHODES S13

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

DÉRIVABILITÉ

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est dérivable et calculer sa dérivée

$\boxed{1}$ Vous connaissez les dérivées des fonctions usuelles.

$\boxed{2}$ Sur certains intervalles ouverts, f est construite par opérations – combinaison linéaire, produit, quotient , composée et application réciproque– à partir de fonctions usuelles. Les théorèmes d'opérations permettent souvent d'en déduire la dérivabilité de f ainsi que la valeur de sa dérivée sur ces intervalles ouverts

$\boxed{3}$ Une étude particulière est parfois nécessaire en un (ou plusieurs) point isolé a (une borne des intervalles ouverts ci-dessus). En ce cas,

- ▹ lorsque f' possède une limite finie au point a, le thèorème de dérivabilité aux bornes du domaine permet de conclure que f est dérivable en a et que
$$f'(a) = \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x)$$
- ▹ lorsque f' possède une limite infinie au point a, le thèorème de dérivabilité aux bornes du domaine permet de conclure que f n'est pas dérivable en a et que
$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$
- ▹ lorsque f' n'a pas de limite en a, vous revenez à la définition de dérivabilité : il s'agit de prouver que la fonction φ_a possède une limite finie au point a. (reportez-vous aux calculs des limites de fonctions **Chapitres 8** et **9**)

▪▪▪ Quelques formules utiles

f	$\lambda u + \mu v$	$u \times v$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u \circ v$	u^{-1}	e^u	$\ln u$
f'	$\lambda u' + \mu v'$	$u'v + uv'$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$nu^{n-1}u'$	$u' \circ v \times v'$	$\frac{1}{u' \circ u^{-1}}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

▪▪▪ Comment démontrer qu'une fonction est n-fois dérivable

- les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs intervalles de dérivabilité respectifs. Pour démontrer qu'une fonction est n fois dérivable, vous pouvez utiliser les opérations algébriques.
  En particulier, s'il s'agit d'un produit, vous disposez de la formule de **Leibniz** qui explicite la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit.
- comme dans le cours, il y a beaucoup de calcul de dérivée $n^{\text{ième}}$ par récurrence : il s'agit

  $\boxed{1}$ de calculer les premières dérivées de la fonction,

  $\boxed{2}$ de conjecturer une expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$,

  $\boxed{3}$ puis de démontrer votre conjecture par récurrence.
- si f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans $I \setminus \{a\}$ et que f ainsi que ses dérivées successives possèdent des limites finies au point a, le thèorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ permet de conclure que f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans I et que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f^{(k)}(a) = \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f^{(k)}(x)$$

OBTENIR DES INÉGALITÉS ENTRE FONCTIONS

Les pistes sont nombreuses, il faudra choisir astucieusement. La nature de l'inégalité peut être un moyen de sélectionner certaines tactiques. En effet,

- s'il s'agit de prouver un **encadrement** ou de majorer une valeur absolue, les **Inégalités des Accroissements Finis** semblent particulièrement bien adaptées.
- s'il ne s'agit pas d'un encadrement, vous pouvez aussi utiliser les variations de la fonction

▪▪▪ Comment démontrer un encadrement entre fonctions

Si vous devez prouver un encadrement du genre

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leq h(x) \leq d(x), \text{ ou } \forall x \in I, \quad |h(x)| \leq f(x)$$

Il s'agit peut-être d'estimer l'**accroissement** d'une seule fonction. La méthode est simple :

$\boxed{1}$ vous cherchez à faire apparaître cet encadrement comme l'accroissement entre a et b de I d'une fonction φ. La difficulté consiste à bien choisir a et b qui peuvent éventuellement être fonction de x.
$\boxed{2}$ vous étudiez la fonction φ et cherchez un encadrement de sa dérivée φ'.
$\boxed{3}$ d'après les **Inégalités des Acroissements finis**, l'accroissement de φ entre a et b vérifie le même encadrement.

▪▪▪ Comment démontrer une inégalité entre fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur I. On cherche à démontrer que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x).$$

Remarquez tout d'abord qu'une telle inégalité se traduit par

$$\forall x \in I, h(x) \leq 0$$

où $h = f - g$. Lorsque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$: l'inégalité se traduit par $h(x) \leq 0$. La méthode la plus classique consiste à étudier la fonction h afin de déterminer son signe. Vous utilisez donc

- les caractérisations des fonctions monotones dérivables pour étudier les *variations* de h,
- la condition nécessaire d'extremalité pour localiser ses *extremums*.