TECHNIQUES & MÉTHODES S25

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

REPRÉSENTATION MATRICIELLE EN DIMENSIONS FINIES

■■■ Calculer le rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes. Pour déterminer le rang de A

$\boxed{1}$ j'échelonne A par la méthode du **pivot de Gauss**

$\boxed{2}$ le rang de A et de la matrice échelonnée ainsi obtenue coïncident.

■■■ Construire et utiliser la matrice représentative d'une famille de vecteurs

Étant donnée une base $\mathcal{E}$ de E_n et $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p)$ une famille de p vecteurs de E_n, pour déterminer la matrice $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$, représentative de $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{E}$:

$\boxed{1}$ je décompose $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ dans la base $\mathcal{E}$

$$\begin{array}{rcl} \vec{a}_1 & = & a_{1,1} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_{n,1} \cdot \vec{e}_n \\ \vec{a}_2 & = & a_{1,2} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_{n,2} \cdot \vec{e}_n \\ & \vdots & \\ \vec{a}_p & = & a_{1,p} \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_{n,p} \cdot \vec{e}_n. \end{array}$$

$\boxed{2}$ je range les coordonnées de ces vecteurs **en colonnes** pour avoir la matrice

$$A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exercice 45 : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E. On pose $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{\varepsilon}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ et $\vec{\varepsilon}_3 = -\vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Montrez que $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ est une base de E. *réponse :* la matrice représentative de $\mathcal{B}'$ ds la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $\mathrm{Rg}(M) = 3$. Par conséquent M est inversible. D'après la caractérisation matricielle des bases, $\mathcal{B}'$ est une base de E.

■■■ Construire et utiliser la matrice représentative d'une application linéaire

Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$, $\mathcal{E}$ une base de E_p et $\mathscr{F}$ une base de F_n. Pour déterminer la matrice $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ représentative de a dans ces bases

$\boxed{1}$ je décompose $a(\vec{e}_1), \dots, a(\vec{e}_p)$ dans la base $\mathscr{F}$

$$\begin{array}{rcccccccc} a(\vec{e}_1) & = & a_{1,1} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,1} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,1} \cdot \vec{f}_n \\ a(\vec{e}_2) & = & a_{1,2} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,2} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,2} \cdot \vec{f}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a(\vec{e}_p) & = & a_{1,p} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,p} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,p} \cdot \vec{f}_n \end{array}$$

$\boxed{2}$ je range leurs coordonnées en colonnes

$$A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_1), \dots, a(\vec{e}_p)) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exercice 46 : Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ et f l'application définie par $\forall P \in E,\ f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$. 1. Mq $f \in \mathcal{L}(E)$ 2.Déterminez la matrice représentative de f ds la base can de E. 3. f est-il un automorphisme ? *réponse :* 1. On vérifie que f est linéaire. Puis on calcule $f(1), f(X), f(X^2)$. Il s'agit de polynômes de degré inférieur à 2. Donc $\mathfrak{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \subset E$. Donc $f \in \mathcal{L}(E)$.2. De plus en rangeant en colonnes les coordonnées, il vient $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. Cette matrice est de rang 3 (ou de déterminant non nul). Donc M est inversible et donc par la caractérisation des autom $f \in GL(E)$

Exercice 47 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$ telle que $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Diag}(4, 2, 2)$. *réponse :* **analyse :** Suppose qu'une telle base existe. Alors $f(\vec{\epsilon}_1) = 4 \cdot \vec{\epsilon}_1, f(\vec{\epsilon}_2) = 2 \cdot \vec{\epsilon}_2, f(\vec{\epsilon}_3) = 2\vec{\epsilon}_3$. Ainsi $\vec{\epsilon}_p \in \mathrm{Ker}(f - 4id)$, $\vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3 \in \mathrm{Ker}(f - 2id)$. Après calcul, on a $\mathrm{Ker}(f - 4id) = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2id) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, -1))$. On pose $\vec{\epsilon}_1 = (1, 0, 1), \vec{\epsilon}_2 = (1, 1, 0), \vec{\epsilon}_3 = (1, 0, -1)$. **synthèse** en caclulant le rang de la famille, on montre que $\mathcal{B}'$ est une base. Puis on vérifie que $f(\vec{\epsilon}_1) = 4 \cdot \vec{\epsilon}_1, f(\vec{\epsilon}_2) = 2 \cdot \vec{\epsilon}_2, f(\vec{\epsilon}_3) = 2\vec{\epsilon}_3$ de sorte que $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

■■■ Effectuer un changement de bases

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie E_n. On note $P = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(B') \in GL_n(\mathbf{K})$ la matrice de passage Les matrices représentative d'un endomorphisme de E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont liées par $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \times \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P$

Exercice 48 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A. On note $\vec{\epsilon}_1 = (3, -2, 1)$, $\vec{\epsilon}_2 = (-5, 1, 2)$, $\vec{\epsilon}_3 = (1, 1, 2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3)$. 1. Montrez que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$. 2. Déterminez $D = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. 3.Exprimez A^n à l'aide de P, D^n et P^{-1}. *réponse :* 1. $P = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que P est inversible et $P^{-1} =$

$\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ -5 & -5 & 5 \\ 5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$. 2. La matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $D = \mathsf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 3. De la relation, $D = P^{-1} \times A \times P$, on tire successivement $A = P \times D \times P^{-1}$ puis $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.