Chapitre 6

Notions de base

Sommaire

OBJECTIFS

Le chapitre est organisé suivant trois axes complémentaires : ensembles, logique et applications.
En ce qui concerne la logique, il s'agit d'une part d'introduire les quantificateurs existentiel et universel et d'autre part de faire un bilan sur les stratégies de démonstration déjà utilisées au cours de la première période. La théorie des ensembles se réduit ici à introduire du vocabulaire. Pour les applications, vous devrez avoir acquis les notions

- ▷ d'injectivité, surjectivité et bijectivité
- ▷ d'images directes et réciproques d'une partie

Motivation

Dans ce chapitre, nous rappelons les opérations élémentaires sur les ensembles, ainsi que les notions d'applications, suites et équations. Ces *notions de base* seront utiles tout au long du cours. Les applications et les suites forment le socle sur lequel reposera toute l'*Analyse* de première et deuxième année -étude des fonctions réelles d'une variable, suites numériques, séries numériques, *etc.* Enfin, la notion d'équation est essentielle en mathématique, non seulement en *Algèbre linéaire* -systèmes d'équations linéaires- mais aussi en *Algèbre*-nombres complexes, polynômes- ou encore en *Analyse* -équations différentielles.

I Notions sur les ensembles

Vous connaissez déjà tout (ou presque) du contenu de ce paragraphe. Il ne s'agit que de fixer les notations que nous utiliserons dans tout le cours.

1 Appartenance et inclusion

1.a Relation d'appartenance

Définition : *On appelle* ***ensemble*** *une collection d'objets. Ces objets s'appellent les* ***éléments*** *de l'ensemble.*

Notation : *Si E est un ensemble et si x est élément de E, on note $x \in E$. On dit aussi que x* ***appartient*** *à E. Lorsque x n'est pas élément de E, on note $x \notin E$.*

Un ensemble est caractérisé par la donnée de ses éléments. La manière **la plus simple** de définir un ensemble consiste à dresser la liste de ces éléments :

- le **singleton** $\{a\}$,
- la **paire** $\{a; b\}$,
- $\{10, 15, 2\}$

Cependant, il **n'est pas toujours possible** de dresser la liste de tous les éléments :

- soit parce qu'il y a trop d'éléments : **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** sont des ensembles de nombres qui possèdent une infinité d'éléments.
- soit parce qu'il n'y en a pas ! C'est le cas pour l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui a la particularité de ne posséder aucun élément. ☺

1.b Inclusion, égalité

Définition : *Soit E, F deux ensembles.*

- *On dit que E* ***est inclus dans*** *F si tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$.*
- *On dit que E et F sont* ***égaux*** *si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.*

Commentaires : en clair, deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

En pratique : pour démontrer que deux ensembles sont égaux, vous pouvez procéder par *double-inclusion.*

Exemples : $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 15\}$, $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\}$.

Remarque : on ne change pas l'ensemble en modifiant l'ordre de ses éléments ou en les répétant.

Vocabulaire : *lorsque $E \subset F$, on dit que E est un **sous-ensemble** de F, ou bien que E est une **partie** de F.*

1.c Parties d'un ensemble

Définition : *Soit E un ensemble. L'ensemble dont les éléments sont les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.*

Remarque : Soit E un ensemble, alors $\emptyset \subset E$, $E \subset E$.
Soit E et F deux ensembles, alors $E \subset F$ se traduit par $E \in \mathscr{P}(F)$.
Soit a un objet et E un ensemble, alors $a \in E$ se traduit par $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$ ou bien encore $\{a\} \subset E$.

Exercice : Soit $E = \emptyset$. Quel est $\mathscr{P}(E)$? Soit $E = \{1, 2, 3\}$, quel est l'ensemble des parties de E ?

En pratique : il existe deux façons de définir une partie d'un ensemble E :

- **en extension**, cela consiste à citer ses éléments, par exemple $5 \cdot \mathbf{N}$ est l'ensemble des $5 \cdot k$, lorsque k décrit $\mathbf{N}$:
$$5 \cdot \mathbf{N} = \{5 \cdot k\,;\ k \in \mathbf{N}\}$$
- en **compréhension**, cela consiste à sélectionner les éléments de E qui vérifient une propriété, ainsi $5 \cdot \mathbf{N}$ est aussi l'ensemble des entiers n tels que 5 divise n :
$$5.\mathbf{N} = \{n \in \mathbf{N} |\ 5 \text{ divise } n\}$$

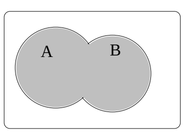
2 Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$

2.a Définitions

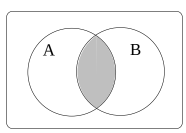
Définition : *Soit E un ensemble, $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on définit*

- **la réunion** *de A et B par $A \cup B = \{x \in E |\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;*
- **l'intersection** *de A et B par $A \cap B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;*
- **le complémentaire** *de A dans E par $\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$;*
- **la différence de** *A et B par $A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B$.*

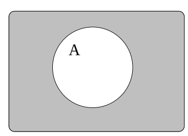
Illustration :



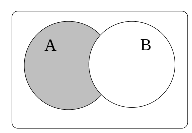
Les éléments de $A \cup B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B



Les éléments de $A \cap B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **et** à B



Les éléments de $\complement_E A$ sont les éléments de E qui n'appartiennent pas à A



Les éléments de $A \setminus B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **mais pas** à B.

Vocabulaire : *on dit que deux parties A et B sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Remarques :

1. Pour toutes parties A et B de E, $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
2. Dire que $x \in \complement_E A$ signifie précisément $x \in E$ et $x \notin A$! !

Exercice : Déterminez $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\complement_{\mathbf{R}} A$, lorsque A et B sont les intervalles réels définis par :

$$A =]0, 2], \quad B = [1, 3].$$

2.b Règles de calcul pour la réunion, intersection

Les règles de calcul pour les opérations élémentaires entre parties sont simples à retenir :

Proposition 6.1.— Soit $(A,\ B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ un triplet de parties d'un ensemble E.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vocabulaire : *On résume ces propriétés en disant que la réunion et l'intersection sont commutatives, associatives et distributives l'une sur l'autre.*

Démonstration $\triangledown$
Les propriétés de commutativité et d'associativité découlent directement des définitions. Montrons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nous allons établir que ces deux parties ont les mêmes éléments.
Soit $x \in E$ arbitraire fixé.

- si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
- si $x \notin A$, alors $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in B \cap C \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dans tous les cas, nous avons démontré que x est élément de $A \cup (B \cap C)$ si et seulement si x est élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ces deux ensembles ont donc mêmes éléments, ils sont égaux. ▲

2.c Règles de calcul pour les complémentaires

Intéressons-nous à présent aux propriétés du complémentaire. Par définition, pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap \complement_E A = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \complement_E A = E.$$

Ces deux propriétés caractérisent le complémentaire :

Proposition 6.2.— Caractérisation du complémentaire —. Soit A et B des parties d'un ensemble E,

$$\boxed{B = \complement_E A \textit{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset}$$

Commentaires : intuitivement cela signifie que le complémentaire de A est la plus petite partie de E qu'il faut rajouter à A pour recouvrir E.

Démonstration $\triangledown$

$\boxed{\text{CN}}$ Supposons que $B = \complement_E A$. En ce cas, par définition, $A \cap B = \emptyset$ car un élément de E ne saurait appartenir à A et à son complémentaire et $A \cup B = E$ car tout élément de E appartient à A ou à son complémentaire.

$\boxed{\text{CS}}$ Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. *Montrons*, par *double-inclusion* que $B = \complement_E A$.
Soit $x \in \complement_E A$. Par définition, cela signifie que $x \in E$ et $x \notin A$. Puisque par hypothèse $E = A \cup B$, x appartient à A ou à B. Comme x n'appartient pas à A, il est nécessairement élément de B. Ceci prouve que $\complement_E A \subset B$.
D'autre part, soit $x \in B$. Comme par hypothèse $A \cap B = \emptyset$, je suis sûr que x n'appartient pas à A. Mais c'est dire précisément que $x \in \complement_E A$. Ainsi $B \subset \complement_E A$.
Conclusion : si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $B = \complement_E A$. ▲

Cette caractérisation permet d'obtenir facilement les propriétés suivantes :

Corollaire 6.3.— Soit A, B deux parties d'un ensemble E, alors
- $B = \complement_E A$ *si et seulement si* $A = \complement_E B$.
- $\complement_E \complement_E A = A$

L'opération "passage au complémentaire" se comporte bien vis-à-vis des deux autres opérations :

Proposition 6.4.— Propriétés du passage au complémentaire —. [1] Soit A, B deux parties d'un ensemble E, alors :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \blacksquare\ \complement_E(A \cup B) & = & (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \\ \blacksquare\ \complement_E(A \cap B) & = & (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \end{array}}$$

Retenez que :
- le *complémentaire* d'une **réunion** est l' **intersection** des *complémentaires*,
- le *complémentaire* d'une **intersection** est la **réunion** des *complémentaires*.

1. Ces propriétés sont aussi appelées Lois de Morgan

Démonstration ▽

- Pour démontrer que $C = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$ est le complémentaire de $A \cup B$ dans E, nous utilisons la caractérisation ci-dessus. Il nous suffit de démontrer que $C \cup (A \cup B) = E$ et $C \cap (A \cup B) = \emptyset$. Ces calculs reposent sur les propriétés d'associativité et de distributivité rappelées plus haut.

$$\begin{aligned} C \cup (A \cup B) &= (A \cup B) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B) = \big((A \cup B) \cup \complement_E A\big) \cap \big((A \cup B) \cup \complement_E B\big) = E \cap E \\ C \cap (A \cup B) &= (A \cup B) \cap (\complement_E A \cap \complement_E B) = \big(A \cap (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) \cup \big(B \cap (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

- Pour démontrer que $D = \complement_E A \cup \complement_E B$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans E, on est amené à des calculs tout à fait analogues aux précédents. ▲

2.d Produit cartésien d'ensembles

Définition : *Soit x et y deux objets. On appelle* ***couple*** *(x, y) la suite formée de deux objets dont le premier est x et le second est y.*

Warning : Ne confondez pas le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$, c'est tout à fait différent. Par exemple, lorsque x et y sont deux objets distincts, on a $(x, y) \neq (y, x)$ tandis que $\{x, y\} = \{y, x\}$
Retenez que :

Corollaire 6.5.— Soit x, x', y, y' des objets.

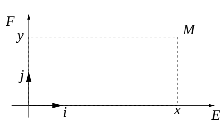
$$\boxed{(x, y) = (x', y') \textit{ si et seulement si } x = x' \text{ et } y = y'.}$$

Définition : *Soit E, F deux ensembles, le* ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble, noté $E \times F$ dont les éléments sont les couples (x, y), $x \in E$, $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y)\,;\ x \in E, y \in F\}.$$

Exemple : formons le produit cartésien $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Les éléments de ce produit sont les couples (x, y) de nombres réels. On peut se représenter cet ensemble de la manière suivante : munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère (O, i, j) et associons à tout couple $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Ceci nous permet d'identifier $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ au plan $\mathcal{P}$.

Illustration :



Remarque : servez-vous de l'illustration précédente pour représenter tout produit d'ensembles.

Définition : Généralisation —. *Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Étant donné $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles, on définit le* ***produit cartésien*** *$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ par :*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

La liste ordonnée *$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'appelle un* ***n-uplet****.*

Exemple : $\mathbf{R}^3$ peut être identifié à l'espace géometrique $\mathscr{E}$ au moyen du choix d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, ou à l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ par le choix d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

3 Relations sur un ensemble

3.a Relations binaires sur un ensemble

Définition : *Soit E, F deux ensembles. Une relation $\mathscr{R}$ de E vers F est la donnée d'une partie Γ de $E \times F$. Lorsqu'un couple (x, y) appartient à Γ, on dit que x* ***est en relation avec*** *y. On note cette assertion $x\mathscr{R}y$. Γ est appelé le graphe de la relation. Une relation de E vers lui-même est appelée une relation binaire sur E.*

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire de E vers lui-même. On dit que $\mathscr{R}$ est :*

- *réflexive lorsque $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$.*

- *symétrique lorsque* $\forall (x,y) \in E \times E, \quad (x\mathscr{R}y) \Rightarrow (y\mathscr{R}x)$.
- *antisymétrique lorsque* $\forall (x,y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x = y)$.
- *transitive lorsque* $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow (x\mathscr{R}z)$.

Exemple : dans $\mathbf{N}$, la relation x divise y, notée $x \mid y$, est une relation binaire. Elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

3.b Relations d'équivalence sur un ensemble

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.*
*On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'équivalence** si $\mathscr{R}$ est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.*

Exemples :

- relation de congruence sur $\mathbf{R}$: soit $\alpha \in \mathbf{R}^{+\star}$. On définit une relation sur $\mathbf{R}$, appelée **relation de congruence modulo** α par
$$x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ y = x + k\,\alpha$$
- relation de congruence sur $\mathbf{Z}$: soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On définit une relation sur $\mathbf{Z}$, appelée **relation de congruence modulo** n par
$$x \equiv y\ [n] \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ y = x + k\,n$$

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence de** x et on note $cl(x)$ la partie de E formée de tous les éléments y équivalents à x :*

$$cl(x) = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$$

Défi ! deux classes d'équivalence sont disjointes ou confondues.

3.c Relation d'ordre sur un ensemble

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.*
*On dit que $\mathscr{R}$ est une **relation d'ordre** sur E si $\mathscr{R}$ est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.*

Exemple : Dans $\mathbf{R}$, ou dans $\mathbf{N}$, la relation $x \leq y$ est une relation d'ordre, la relation $x = y$ est une relation d'équivalence. Quel est son graphe au fait ? Dans $\mathscr{P}(E)$, $A \subset B$ est une relation d'ordre et $A = B$ est une relation d'équivalence.

Définition : *Un ensemble ordonné est un couple $(E, \preceq)$ où $\preceq$ est une relation d'ordre sur E.*

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

1. *Deux éléments x, y de E sont dits **comparables** si $(x \preceq y)$ ou $(y \preceq x)$.*
2. *Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, c'est-à-dire*
$$\forall (x,y) \in E \times E \quad (x \preceq y) \text{ ou } (y \preceq x),$$
*on dit que est un ensemble **totalement ordonné**.*
*Dans le cas contraire, on dit que $(E, \preceq)$ est **partiellement ordonné**.*

Exemple : $(\mathbf{R}, \leq)$ est totalement ordonné, tandis que $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ n'est que partiellement ordonné.

Notation : *On note parfois $\prec$ la relation dite d'ordre strict associée à $\preceq$. Elle est définie par $x \prec y \iff x \preceq y$ et $x \neq y$. Attention il ne s'agit JAMAIS d'une relation d'ordre ! Pourquoi ?*

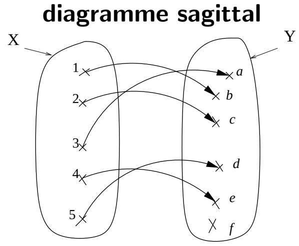
II Applications

1 Définition et exemples d'applications

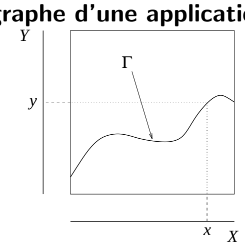
1.a Graphe d'une application

Intuitivement, une application $f : E \to F$ est un *procédé* qui à tout élément de l'ensemble de départ E associe *sans ambiguïté* un unique élément de F. On peut se figurer ce procédé sous la forme d'un diagramme sagittal :
Illustration :

diagramme sagittal



graphe d'une application



Définition : *Soit E, F deux ensembles et Γ une partie de $E \times F$. On dit que Γ est le* ***graphe d'une application*** *f si pour* ***tout*** *élément $x \in E$, il existe* ***un unique élément*** *$y \in F$ tel que le couple (x, y) appartienne à Γ.*

Commentaires : en d'autres termes, à tout élément x de E, "Γ" permet d'associer un unique élément y de F. Cet élément est appelé **image** de x par f. On le note $f(x)$.

En pratique : on ne décrit pas le graphe d'une application, au contraire on insiste sur le *procédé* qui à x associe son image. C'est pour cela qu'une application f de E vers F est notée :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Vocabulaire : *Soit $f : X \to Y$ une application. Alors*
- *E est appelé l'****ensemble de départ****, F l'****ensemble d'arrivée****,*
- *$\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F |\ y = f(x)\}$ est appelé le* ***graphe*** *de f,*
- *Pour tout $x \in X$, l'élément $y = f(x)$ de F est appelé* ***image*** *de x par f.*
- *Pour tout $y \in F$, un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un* ***antécédent*** *de y par f.*

1.b Exemples d'applications

Nous avons déjà étudié les fonctions usuelles qui sont autant d'exemples d'applications d'un intervalle de **R** vers **R**. Voici quelques exemples plus théoriques : étant donnés deux ensembles E et F
- l'application **identité** de E dans lui-même est définie par $id_E \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- si $A \subset E$, l'**injection canonique** de A dans E est définie par $i_A \;:\; \begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- la **projection canonique** de $E \times F$ sur F est définie par $p_F \;:\; \begin{array}{ccc} E \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$

1.c Égalité de deux fonctions

Notation : *Soit E, F deux ensembles. L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathscr{F}(E, F)$, ou bien F^E.*

Définition : *Deux applications $f, g : E \to F$ sont dites* ***égales****, et on note $f = g$ lorsque $\Gamma_f = \Gamma_g$.*

Ceci se traduit par la propriété *universelle* :

Corollaire 6.6.— Égalité de deux fonctions ❤ —. Soit $f, g : E \to F$ deux applications.

$$\boxed{f = g \text{ si et seulement si pour tout } x \in E,\ \ f(x) = g(x)}$$

1.d Composée d'applications

Proposition 6.7.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
On définit pour tout $x \in E$,
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$
Le procédé de E vers G qui à tout élément $x \in E$ associe $(g \circ f)(x)$ est une application, appelée la **composée** de f et g.

Démonstration ▽
• Soit $x \in E$ alors $f(x) \in F$ puisque $E \xrightarrow{f} F$. Comme $g : F \to G$ est définie sur F, $g(f(x))$ est bien défini et appartient à G. Tout élément x a bien (au moins) une image par $g \circ f$.
• Montrons que cette image est unique :
Soit $x \in E$ et $(z, z') \in G^2$, tels que $g \circ f(x) = z$ et $g \circ f(x) = z'$. Posons $y = f(x) \in F$: il vient $g(y) = z$ et $g(y) = z'$. Comme g est une application, ceci implique que $z = z'$. ▲

Attention : pour que la composée de deux applications ait un sens, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de la première soit contenu dans l'ensemble de départ de la deuxième !

En pratique : pour déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{g\circ f}$ d'une fonction composée $x \mapsto g\,(f(x))$,
$\boxed{1}$ déterminez les ensembles de définition $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de f et g.
$\boxed{2}$ on a $\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\}$. Pour déterminer $\mathcal{D}_{g\circ f}$ vous devez résoudre[2] dans $\mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exemple : Soit f et g les applications définies par :
$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & 1 + x^3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{+\star} & \to & \mathbf{R} \\ y & \mapsto & \ln y \end{array}$$
L'application $f \circ g$ est bien définie et pour tout $y \in \mathbf{R}^{+\star}$, $(f \circ g)(y) = 1 + (\ln y)^3$.
En revanche, $g \circ f$ n'est pas définie.

Proposition 6.8.— Soit $E \xrightarrow{f} F$, $F \xrightarrow{g} G$, et $G \xrightarrow{h} H$ trois applications. Alors
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.e Familles, Suites

Lorsqu'on souhaite insister sur les valeurs prises par une application, on utilise le langage des familles :

Définition : *Soit E un ensemble. On appelle **famille d'éléments** de E toute application à valeurs dans E :*
$$e\ :\ \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & e_i \end{array}$$

Notation : *pour tout $i \in I$, on note e_i à la place de $e(i)$. La famille est notée $(e_i)_{i\in I}$, au lieu de* $e\ :\ \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & e_i \end{array}$.
*L'ensemble de départ I est appelé l'ensemble des **indices**.*

Exemples :
- une liste $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ de 4 nombres réels est une famille de nombres réels indexée par $I = \{1; 2; 3; 4\}$;
- à chaque nombre réel x, on associe l'intervalle $I_x =]x; x+1]$. Ce procédé definit une application de $\mathbf{R}$ vers l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$. $(I_x)_{x\in\mathbf{R}}$ est donc une famille d'intervalles (indexée par $\mathbf{R}$).

Définition : Réunion et intersection d'une famille d'ensembles
Soit E un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, on définit
- **la réunion de la famille** : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} E_i = \{x \in E \mid \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in E_i\}$.

2. il s'agit souvent d'une inéquation

- **l'intersection de la famille** : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i = \{x \in E \mid \ \textit{pour tout } i \in I,\ x \in E_i\}$

Commentaires : en clair,

- un élément x de E appartient à $\bigcup_{i\in I} E_i$ s'il appartient à l'**un des** E_i au moins.
- un élément x de E appartient à $\bigcap_{i\in I} E_i$ s'il appartient à **tous les** E_i

Exemple : $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}[0,1-1/n] = [0,1[$ et $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}[0,1+1/n[= [0,1]$.

Dans le cas particulier où l'ensemble I des indices est l'ensemble des entiers naturels, nous obtenons la notion de suite d'éléments de E :

Définition : *Une famille $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E indexée par $\mathbf{N}$ est appelée une **suite d'éléments** de E.*

Exemple : La suite $\left(\dfrac{1+n}{n^2+5}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres rationnels.

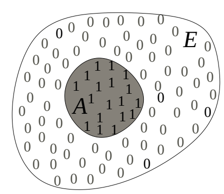
2 Fonction indicatrice d'une partie

Les fonctions indicatrices de parties établissent le lien entre la théorie des ensembles et celle des applications. Comme conséquence, elles permettent entre autre de remplacer le calcul ensembliste par du calcul dans $\{0;1\}$!

2.a Definition

Définition : *Soit E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de E. La fonction **indicatrice** de A est l'application de E vers $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A : E \to \{0;1\}$ qui à tout élément x de E associe*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{si } x \in A \\ 0 \ \textit{si } x \notin A \end{cases}.$$



Commentaires : en clair, l'indicatrice de A indique si **oui** ($\mathbb{1}_A(x) = 1$) **ou non** ($\mathbb{1}_A(x) = 0$) un élément x de E appartient à A.

2.b Propriété fondamentale

L'intérêt majeur des fonctions indicatrices réside en ceci qu'elles caractérisent les parties associées[3]. En effet :

Théorème 6.9.— Soit E un ensemble. Etant données deux parties A et B de E,

$$\boxed{A = B \ \textit{ si et seulement si } \ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B}$$

En pratique : pour démontrer que deux parties sont égales, il vous suffit de vérifier que leurs fonctions indicatrices sont égales. Cette méthode est souvent très avantageuse, puisqu'elle permet de remplacer le calcul ensembliste par des opérations dans $\{0,1\}$.

Démonstration $\triangledown$

- Si $A = B$, il est clair que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
- Réciproquement, soit (A,B) un couple de parties de E telles que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. Montrons que $A = B$.
  Par symétrie, il suffit de prouver l'inclusion $A \subset B$.
  Soit donc $x \in A$. Alors par construction de la fonction indicatrice, $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Comme par hypothèse les fonctions indicatrices de A et de B sont égales, j'en déduis que $\mathbb{1}_B(x) = 1$, ce qui revient à dire que $x \in B$.
  Ainsi, tout élément de A appartient aussi à B, *i.e.* $A \subset B$. ▲

3. c'est la raison pour laquelle elles sont aussi appelées **fonctions caractéristiques**

2.c Opérations élémentaires sur les fonctions indicatrices

Proposition 6.10.— Soit A et B des parties d'un ensemble E. Les fonctions indicatrices de $\complement_E A$, $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont données par :

- $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A\,(1 - \mathbb{1}_B)$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$

Démonstration ▽
Pour démontrer l'égalité de deux fonctions, on vérifie qu'elles coïncident en tout élément x de E.

- soit $x \in E$, deux cas se présentent :
  - si $x \in A$, alors $x \notin \complement_E A$ et par conséquent $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $1 - \mathbb{1}_{\complement_E A}(x) = 1 - 0 = 1$.
  - si $x \notin A$, alors $x \in \complement_E A$ et par conséquent $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_{\complement_E A}(x) = 1 - 1 = 0$.

  Dans tous les cas, ces deux fonctions coïncident, elles sont donc égales.
- soit $x \in E$, deux cas se présentent :
  - si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$. Par conséquent, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$.
  - si $x \notin A\cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$. Nous avons donc d'une part $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et d'autre part $\mathbb{1}_A(x)\, \mathbb{1}_B(x) = 0$, car l'un des deux facteurs (au moins) est nul.

  Dans tous les cas, ces deux fonctions coïncident, elles sont donc égales.
- Par définition, $A \setminus B = A \cap \complement_E B$. D'après le 1. et 2., il en résulte que

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} \quad = \quad \mathbb{1}_{A\cap\complement_E B} = \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_{\complement_E B} = \mathbb{1}_A\,(1 - \mathbb{1}_B)$$

- Pour calculer la fonction indicatrice de $A \cup B$, on calcule d'abord la fonction indicatrice de son complémentaire : $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$. D'après les propriétés 1. et 2., il en résulte que ,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\complement_E(A\cup B)} &= \mathbb{1}_{\complement_E A\cap\complement_E B} = \mathbb{1}_{\complement_E A}\, \mathbb{1}_{\complement_E B} = (1 - \mathbb{1}_A)\,(1 - \mathbb{1}_B) \\ &= 1 - \big(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B\big) \end{aligned}$$

  Finalement, comme $\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E(A\cup B)}$, il vient : $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$. ▲

À partir de ces opérations élémentaires, il est possible de démontrer des propriétés ensemblistes intéressantes.

Exercice : Soit E un ensemble.

1. Étant donnée deux parties A et B de E, on appelle **différence symétrique** de A et de B la partie de E définie par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Démontrez que

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\, \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$$

2. En déduire que pour toutes parties A, B et C de E $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

3 Image directe, image réciproque d'une partie

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$, $B \subset F$, on définit :*

- *l'**image directe** de A par f comme le sous-ensemble de F :*

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}^{4} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

- *l'**image réciproque** de B par f, comme le sous-ensemble de E :*

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Commentaires : en clair

- $f(A)$ est l'ensemble des **images** des éléments de A par f.

4. Lisez : "$f(A)$ est l'ensemble des $f(x)$ quand x décrit A"

- $\overset{-1}{f}(B)$ est l'ensemble formé des **antécédents** des éléments de B. Il est caractérisé par $x \in \overset{-1}{f}(B)$ ssi $f(x) \in B$.
  En particulier, si $b \in F$ alors $\overset{-1}{f}(\{b\}) = \{x \in E, f(x) = b\}$ est simplement l'ensemble des antécédents de b par f.

Ne confondez pas $\overset{-1}{f}(B)$ avec l'application réciproque f^{-1} ! L'*application réciproque* n'est définie que pour les applications *bijectives*, tandis que l'*image réciproque* $\overset{-1}{f}(B)$ est définie pour n'importe quelle application.
Lorsque f est bijective, alors l'application f^{-1} est définie et $\overset{-1}{f}(B) = f^{-1}(B)$.

Exemple : Soit la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout nombre réel x par $f(x) = x^2$.

- $f(]-7;5]) = [0;49[$.
- $\overset{-1}{f}([4,9[) =]-3,-2] \cup [2,3[$.

4 Restriction, prolongement, application induite

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$ une partie de E. On appelle* ***restriction*** *de f à A l'application, notée $f_{|A}$, définie par* $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Remarque : Soit $i_A : A \hookrightarrow E$ l'injection canonique. Alors $f_{|A} = f \circ i_A$.

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application et $\tilde{E}$ un ensemble contenant E. On appelle* ***prolongement*** *de f à $\tilde{E}$ toute application $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ telle que $\tilde{f}|_E = f$, i.e. $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in E$.*

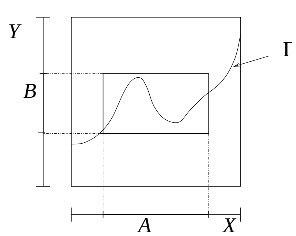
Soit $E \subset \tilde{E}$, $f : E \to F$, $\tilde{f} : \tilde{E} \to F$ deux applications. Notons $j : E \hookrightarrow \tilde{E}$ l'injection canonique. Il résulte immédiatement de la définition de prolongement et de la remarque ci-dessus que :

$$\tilde{f} \text{ est un prolongement de } f \textit{ si et seulement si } \tilde{f} \circ j = f.$$

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application, $A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(F)$ telles que $f(A) \subset B$. On définit une nouvelle application appelée* ***application induite*** *par f de A vers B, par* $f_{A,B} : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Remarque : La condition $f(A) \subset B$ est nécessaire pour que $f_{A,B}$ définisse une application de A vers B.

Illustration :



5 Résolution de l'équation $f(x) = b$ dans A

Définition : *Soit $f : E \to F$ une application, $A \in \mathscr{P}(E)$, une partie de E et $b \in F$ un élément de f. Résoudre dans A l'équation*

$$f(x) = b \tag{6.1}$$

c'est déterminer l'ensemble $\mathscr{S} = \{x \in A \mid f(x) = b\}$.

Vocabulaire :

- *dans l'équation* (6.1) *x s'appelle l'****inconnue*** *et b le* ***second membre****.*
- *un élément $x \in \mathscr{S}$ s'appelle une* ***solution*** *de* (6.1).

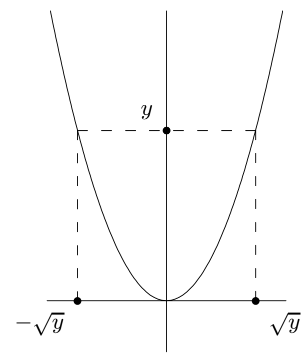
Soit $f : E \to F$ une application, $A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(F)$ telle que $f(A) \subset B$.
La résolution de l'équation (6.1) est liée à l'étude de l'application induite $f_{A,B}$: il s'agit en effet de déterminer l'ensemble des antécédents de b par $f_{A,B}$.

III Injectivité, surjectivité, bijectivité

1 Injectivité, surjectivité

1.a Exemple introductif

D'après la définition d'application $f : E \to F$, tout élément x de E possède une image et une seule par f. En revanche, étant donné un élément $y \in F$, rien ne garantit, ni l'existence, ni l'unicité, d'antécédents pour y par f. Au contraire, l'exemple suivant montre qu'il ne peut y avoir de réponse simple à cette question : certains éléments de F peuvent ne pas avoir d'antécédents, tandis que d'autres en ont plusieurs.



Exemple : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ et $y \in \mathbf{R}$ fixé. Alors

- si $y < 0$, il n'admet *aucun* antécédent par f ;
- si $y = 0$, il admet comme *unique* antécédent 0 ;
- si $y > 0$, il admet exactement *deux* antécédents $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

1.b Définitions

Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

Définition : *Une application $f : E \to F$ est dite :*

- ***injective** si pour tout couple (x, x') de $E \times E$, la relation $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$, c'est-à-dire*

$$\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

- ***surjective** si pour tout élément y de F, il existe[5] un élément x de E tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

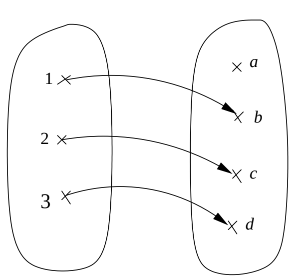
Commentaires : ces deux notions s'interprètent en termes d'antécédents :

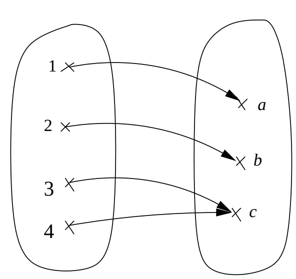
- f est surjective si tout élément y de F a *au moins* un antécédent.
- f est injective si tout élément y de F a *au plus* un antécédent.

Vocabulaire : *une application injective est aussi appelée une **injection**, une application surjective une **surjection**.*

Exemple : l'injection canonique $i_A : A \hookrightarrow E$ est injective. La projection canonique $p_F : E \times F \to F$ est surjective (si E est non vide).

Exercice : Les diagrammes sagittaux suivants représentent-ils une application injective ? surjective ? *Justifiez !*





5. au moins

1.c Composition et injectivité, surjectivité

Proposition 6.11.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- **Si** f et g sont injectives, **alors** $g \circ f$ est injective
- **Si** f et g sont surjectives, **alors** $g \circ f$ est surjective.

Démonstration ▽

- Soit $(x, x') \in E \times E$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme g est injective, ceci implique que $f(x) = f(x')$. Comme f est elle aussi injective, on en déduit finalement que $x = x'$.

- Soit $z \in G$, comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est elle aussi surjective, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g \circ f(x) = g(y) = z$. ▲

Proposition 6.12.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- **Si** $g \circ f$ est injective, **alors** f est injective,
- **Si** $g \circ f$ est surjective, **alors** g est surjective.

Démonstration ▽

- Soit $(x, x') \in E \times E$ tel que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, *i.e.* $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme par hypothèse $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x = x'$.
- Soit $z \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$.
  Posons $y = f(x)$, il vient $g(y) = z$. ▲

Exercice : Soit $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrez que

- **Si** h est surjective et g est injective, **alors** f est surjective.
- **Si** h est injective et f est surjective, **alors** g est injective.

2 Bijectivité

2.a Définition

Définition : *Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

Commentaires : du point de vue des antécédents, cela signifie que tout élément $y \in F$ a exactement un antécédent.

Corollaire 6.13.— Soit $f : E \to F$ une application, f est bijective si *pour tout élément* y de F, *il existe* un *unique* élément x de E tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire

- $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$
- $\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

Notation : *on note $\exists!$ pour «existe - unique». On écrira alors que f est bijective si*

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x)$$

Exemples :

- la fonction identité $id_E : E \to E$ est bijective ;
- la fonction Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est bijective.

2.b Point de vue équations ❤

D'après les interprétations que nous avons données des notions d'injectivité et de surjectivité en termes d'antécédents, $f : E \to F$ est bijective *si et seulement si* tout élément $y \in F$ possède :

— **au moins** un antécédent, et

— **au plus** un antécédent.

Par conséquent $f : E \to F$ est bijective, *si et seulement si* tout élément y possède un **unique** antécédent par f dans E. En d'autres termes, nous pouvons caractériser la bijectivité de f, au moyen des équations

$$y = f(x)$$

Proposition 6.14.— Soit $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est bijective} \\ \textit{si et seulement si} \\ \text{pour tout élément } b \in F, \text{ l'équation } \quad f(x) = b \quad \text{admet une unique solution } x \text{ dans } E. \end{array}}$$

Exercice : Montrez que l'application $f : \begin{array}{ccc}]-\infty; 1[& \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \ln(1-t) \end{array}$ est bijective et déterminez son application réciproque.

Solution $\triangledown$

Soit $y \in \mathbf{R}$, un nombre réel quelconque. Montrons que l'équation

$$f(x) = y \tag{6.2}$$

admet une solution unique. Raisonnons par équivalences, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, nous avons

$$\begin{array}{rll} f(x) = y & \textit{si et seulement si} & \ln(1-x) = y \\ & \textit{si et seulement si} & 1 - x = \exp(y) \\ & \textit{si et seulement si} & x = 1 - \exp(y). \end{array}$$

Ainsi, pour toute valeur de $y \in \mathbf{R}$ l'équation (6.2) admet pour solution, unique, le nombre réel strictement inférieur à 1 : $x = 1 - \exp(y)$. ▲

2.c Application réciproque d'une bijection

Définition : *Soit $f : E \to F$ une **bijection**. Tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent par f. On note $f^{-1}(y)$ cet antécédent. Le procédé qui à tout $y \in F$ associe $f^{-1}(y)$ définit une application, notée $f^{-1} : F \to E$ et appelée **application réciproque** de f.*

Corollaire 6.15.— Soit $f : E \to F$ une **bijection**, alors tout couple $(x, y) \in E \times F$, on a

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{array}\right. \quad \textit{si et seulement si} \quad \left\{\begin{array}{l} x \in E \\ y = f(x) \end{array}\right.}$$

En pratique : le point de vue équation s'avère particulièrement efficace pour démontrer qu'une application est bijective **et** déterminer son application réciproque.

Exemple : la fonction $\ln : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}$ est bijective, son application réciproque est $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+\star}$.

Théorème 6.16.— Caractérisation de l'application réciproque —. Soit $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{f \text{ est bijective } \quad \textit{si et seulement si} \text{ il existe application } g : F \to E \text{ telle que } \begin{array}{l} \bullet \quad g \circ f = id_E \\ \bullet \quad f \circ g = id_F \end{array}}$$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Commentaires : en clair, ce théorème affirme qu'il suffit d'exhiber un procédé g, *inverse* de f, pour garantir que f est une bijection.

Démonstration ▽
• Supposons f bijective et montrons que l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ vérifie $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.
Soit y un élément de F. Notons $x = f^{-1}(y)$. D'après ce qui précède, x et y sont liés par $y = f(x)$. D'où je tire $y = f \circ f^{-1}(y)$.
Comme ceci est vrai pour n'importe quel $y \in F$, j'ai prouvé que $f \circ f^{-1} = id_F$.

Soit $x \in E$, posons $y = f(x)$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Or par construction x est un antécédent de y par f. Donc $x = f^{-1}(y)$, d'où je tire finalement $x = f^{-1} \circ f(x)$.
Comme ceci est vrai pour n'importe quel $x \in E$, j'ai prouvé que $f^{-1} \circ f = id_E$.

• Réciproquement, supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Montrons que f est bijective. C'est une conséquence de la **Proposition** 6.12. En effet, par hypothèse, la composée $f \circ g$ est[6] surjective. D'après la **Proposition** 6.12, ceci n'est possible que lorsque f est elle-même surjective. De manière analogue, la composée $g \circ f$ est injective, donc f est injective. ▲

Exemples : Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une *involution de* X, c'est-à-dire une application de X dans lui-même vérifiant $f \circ f = id_X$.

- D'après le **Théorème** précédent, f est bijective et $f^{-1} = f$.
- Nous avons déjà rencontré de telles applications involutives : la passage au complémentaire, la fonction inverse, une symétrie centrale du plan, etc.

Corollaire 6.17.— Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Démonstration ▽
Comme f est bijective, son application réciproque existe et vérifie $f \circ f^{-1} = id_F \quad f^{-1} \circ f = id_E$.
Relisons cette assertion : il existe donc une application $h : E \to F$ telle que $h \circ f^{-1} = id_F \quad f^{-1} \circ h = id_E$.
Il suffit de prendre $h = f$. Par conséquent, f^{-1} est bijective, et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = h = f$. ▲

Proposition 6.18.— Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

> **Si** f et g sont bijectives, **alors** la composée $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Démonstration ▽
D'après le **Théorème** 6.16, il suffit de calculer $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$ et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$. Par associativité de la composition des applications, il vient :

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{=id_F} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_G \\
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{=id_F} \circ f = f^{-1} \circ f = id_E
\end{aligned}$$

Ainsi, $(g \circ f)$ est bijective et son application réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$. ▲

En pratique : cette propriété est surtout utile pour démontrer qu'une fonction composée est bijective.

6. l'application id_F, donc en particulier

IV Éléments de logique

1 Généralités

1.a Rédiger un texte mathématique

Un texte mathématique, comme une copie, doit être rédigé avec précision tout en étant le plus court possible. Cette exigence de concision s'apprend ! Dans cette partie du chapitre, nous allons introduuire les clés nécessaires pour vous aider à construire rigoureusement une démonstration.
Vous ne perdrez pas de vue que dans votre texte, tout doit être parfaitement justifié ! cela suppose que tous les objets variables utilisés doivent être définis correctement au préalable et que pour utiliser un théorème du cours vous devez :

1. vérifier les hypothèses du théorème
2. citer le nom du théorème
3. énoncer les conclusions du théorème

1.b Vocabulaire

Les mathématiques sont un langage et il convient de s'entendre sur le vocabulaire avant d'aller plus loin. Une phrase mathématique s'appelle une *assertion.* Une assertion est un assemblage de symboles mathématiques qui possède une valeur logique. Plus précisément :

Définition : *Une* ***assertion mathématique*** *est une application d'un ensemble de variables,* à valeurs *dans l'ensemble à deux éléments* $\{Vrai, Faux\}$*. Une assertion* $P : E \to \{Vrai, Faux\}$ *est aussi appelée une* ***propriété des éléments*** *de* E*.*

Exemple : $0 = 1$, $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$, $3x = 4 \iff x = 4/3$ sont des assertions mathématiques.
De même $x^2 > 3$ est une propriété que peuvent ou non vérifier les réels. C'est une application de $\mathbf{R} \to \{Vrai, Faux\}$.

Commentaires : La définition ci-dessus traduit précisément le fait qu'une assertion a **toujours**[7] une valeur logique : elle est *soit vraie, soit fausse*, mais surtout *jamais les deux en même temps.* C'est une règle fondamentale qui s'appelle le **principe du tiers exclu**.

Par commodité, on convient que lorsqu'on ne précise pas la valeur logique d'une assertion, celle-ci est entendue comme vraie : par exemple, plutôt que d'écrire "soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > 0$ **est vraie**", on écrit "soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > 0$"...

Définition : *On appelle* **Théorème**, **Proposition** *, ou* **Lemme**[8] *une assertion vraie quelles que soient les valeurs de ces variables. Un* **axiome** *est une assertion qui est donnée pour vraie, c'est-à-dire que l'on admet sans démonstration.*

2 Opérations logiques élémentaires

À partir de deux assertions quelconques P et Q, les opérations logiques élémentaires permettent d'en construire d'autres. Pour décrire ces nouvelles assertions, nous utilisons le formalisme des

2.a Tables de vérité

Définition : *La table de vérité d'une assertion* N*, construite à partir de* P *et* Q*, est un tableau qui indique si* N *est vraie ou fausse, suivant les valeurs logiques de* P *et* Q*.*

La table de vérité suivante définit les connecteurs logiques élémentaires :

- la **négation** de P, notée *non* P ;
- la **disjonction** de P et Q , notée P *ou* Q ;
- la **conjonction** de P et Q , notée P *et* Q ;
- l'**implication** P entraîne Q , notée $P \Rightarrow Q$;
- l'**équivalence** de P et Q, notée $P \iff Q$.

7. pour toute valeur de ses variables
8. suivant la difficulté de la démonstration ou l'importance du résultat

2.b Tables de vérité des connecteurs logiques élémentaires

P	Q	$non\ P$	$P\ ou\ Q$	$P\ et\ Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Commentaires :

- la négation de P est vraie précisément lorsque P est fausse !
- la disjonction de P et de Q est vraie lorsque l'une *au moins* de ces deux assertions est vraie ;
- la conjonction de P et de Q est vraie seulement lorsque P et Q sont toutes les deux vraies.
- l'implication est certainement le *connecteur logique* le plus important en mathématiques. C'est la raison pour laquelle, il y a beaucoup de façons de dire que "P implique Q". Bien entendu, on utilise la forme langage courant "**si** P **alors** Q", mais on dit aussi que "P est une **condition suffisante** pour avoir Q" ou que "Q est une **condition nécessaire** pour avoir P".
- l'équivalence de deux assertions signifie qu'elles ont toujours la même valeur logique : elles sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

Warning : une implication $P \Rightarrow Q$ et une équivalence $P \iff Q$ sont des assertions. En particulier, elles peuvent être vraies ou fausses. De plus, même lorsqu'elles sont vraies, cela ne garantit pas que Q soit vraie.

Exercice : Démontrez l'équivalence :

$$\big(P \iff Q\big) \quad \iff \quad \big(P \Rightarrow Q \ et\ Q \Rightarrow P\big)$$

Définition : *La* ***réciproque de l'implication*** $P \Rightarrow Q$ *est l'implication* $Q \Rightarrow P$.

Attention : l'exercice précédent montre en particulier que la réciproque $Q \Rightarrow P$ peut-être fausse même lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie ! En fait, c'est même pire que ça, les valeurs logiques de ces deux implications sont absolument indépendantes.

2.c Règles de calcul pour la conjonction et la disjonction

Les règles de calculs pour la conjonction et la disjonction sont semblables à celles des opérations ensemblistes de l'intersection et de la réunion, à savoir commutativité, associativité et distributivités :

Proposition 6.19.— Soit P, Q et R trois assertions. Alors

- $P\, ou\, Q \iff Q\, ou\, P$
- $P\, et\, Q \iff Q\, et\, P$
- $(P\, ou\, Q)\, ou\, R \iff P\, ou\, (Q\, ou\, R)$
- $(P\, et\, Q)\, et\, R \iff P\, et\, (Q\, et\, R)$
- $P\, ou\, (Q\, et\, R) \iff (P\, ou\, R)\, et\, (P\, ou\, R)$
- $P\, et\, (Q\, ou\, R) \iff (P\, et\, Q)\, ou\, (P\, et\, R)$

Démonstration ▽

Pour démontrer chacune des six équivalences ci-dessus, il suffit de vérifier que les tables de vérité des deux membres coïncident. Montrons la distributivité de *ou* sur *et*.

P	Q	R	$Q\ et\ R$	$P\ ou\ (Q\ et\ R)$	$P\ ou\ Q$	$P\ ou\ R$	$(P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

▲

2.d Règles de calcul pour la négation

Les règles de calcul de la négation sont quant à elles semblables à celles du passage au complémentaire :

Proposition 6.20.— Soit P et Q deux assertions. Alors

- $P \iff non(nonP)$
- $non(P \text{ } ou \text{ } Q) \iff (non \text{ } P \text{ } et \text{ } non \text{ } Q)$
- $non(P \text{ } et \text{ } Q) \iff (non \text{ } P \text{ } ou \text{ } non \text{ } Q)$

Démonstration $\triangledown$
En procédant comme dans la démonstration précédente, nous obtenons :

P	Q	$non(P \text{ } ou \text{ } Q)$	$(non \text{ } P \text{ } et \text{ } non \text{ } Q)$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Ce qui prouve que la négation d'une disjonction est la conjonction des négations ! ▲

Corollaire 6.21.— Soit P et Q deux assertions.

- $\big(P \Rightarrow Q\big) \iff \big(non \text{ } P \text{ } ou \text{ } Q\big)$.
- $Non\big(P \Rightarrow Q\big) \iff \big(P \text{ } et \text{ } nonQ\big)$.

Remarque : grâce à l'équivalence $\big(P \Rightarrow Q\big) \iff \big(non \text{ } P \text{ } ou \text{ } Q\big)$, on comprend bien que l'implication est vraie lorsque la "*premisse*" P est fausse.

Démonstration $\triangledown$
Montrons la première assertion à l'aide des tables de vérité :

P	Q	$non(P) \text{ } ou \text{ } Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

La deuxième assertions s'en déduit à l'aide des règles de calcul pour la négation. ▲

3 Liens avec les opérations ensemblistes

Il ne vous aura pas échappé que les résultats entre opérations logiques et opérations ensemblistes sont analogues. Examinons ceci en détail :

Soit E un ensemble, on peut définir des parties de E (*en compréhension*), en sélectionnant ses éléments suivant un critère, *i.e.* en ne gardant que ceux qui vérifient certaine propriété :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E | \ P(x) \ vraie \ \} \\ B &= \{x \in E | \ Q(x) \ vraie \ \} \end{aligned}$$

On obtient alors

Proposition 6.22.— Liens avec les opérations ensemblistes —. Soit E un ensemble, P, Q des propriétés que peuvent ou non posséder les éléments de E. Alors

- $\{x \in E | \ P(x)\} \cup \{x \in E | \ Q(x)\} = \{x \in E | \ P(x) \ ou \ Q(x)\}$
- $\{x \in E | \ P(x)\} \cap \{x \in E | \ Q(x)\} = \{x \in E | \ P(x) \ et \ Q(x)\}$
- $\complement_E\{x \in E | \ P(x)\} = \{x \in E | \ (nonP)(x)\}$

4 Propriétés de l'ensemble E

4.a Propriétés universelles et existentielles

Après avoir brièvement étudié les propriétés des *éléments* de E, intéressons-nous aux propriétés de l'ensemble E lui-même. Les propriétés de E peuvent être construites à partir des propriétés de ses éléments de deux manières différentes.

Soit $P : E \to \{V, F\}$ une propriété que peuvent ou non vérifier les éléments de E.

- Imaginez que *tous* les éléments de E vérifient P. En ce cas, P décrit une ≪qualité ≪de l'ensemble E. Si par exemple E désigne une classe prépa et P la propriété des éléments e de E :"*e intègre l'école de ses rêves*". Si tous les élèves de la classe E ont la propriété P, le moins que l'on puisse dire c'est qu'il s'agit d'une *bonne classe* !
- Une autre manière de qualifier E consiste à s'intéresser aux éléments *exceptionnels* de E. Imaginons que dans la classe E, il y a (au moins) un étudiant reçu à Polytechnique, à l'École Normale Supérieure, qui fait une thèse au MIT en nanotechnologies et poursuit ses recherches en Intelligence Articielle à Harvard. On peut encore conclure qu'il s'agit d'une classe de bonne qualité !

Proposition-Définition 6.23.— Propriétés d'un ensemble —. Soit $P : E \to \{V, F\}$ une propriété que peuvent ou non vérifier les *éléments* de E. Les propriétés de l'*ensemble* E sont de l'un des deux types suivants :

- **Type Existentiel :** Il existe[9] un élément x de E vérifiant P. On note $\exists x \in E;\ \ P(x)$
- **Type Universel :** Tous les éléments x de E vérifient P. On note $\forall x \in E,\ \ P(x)$

Vocabulaire : *Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont respectivement appelés les* ***quantificateurs*** *universel et existentiel.*

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Quantifiez les assertions suivantes :

1. La fonction f est la fonction nulle ;
2. la fonction f s'annule sur $\mathbf{R}^+$;
3. f est injective ;
4. La fonction ne s'annule que sur $\mathbf{R}^+$.

4.b Règles de calcul

Il existe deux règles pour utiliser convenablement les quantificateurs existentiels et universels sont données par les règles suivantes :

Proposition 6.24.— Négation d'une propriété existentielle/universelle

- $\textit{non}\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\forall x \in E;\ \ \textit{non}\ P(x)\big)$
- $\textit{non}\ \big(\forall x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\exists x \in E;\ \ \textit{non}\ P(x)\big)$

Attention : Lorsque dans une même assertion se trouvent plusieurs quantificateurs, l'ordre dans lequel ils apparaissent est important.
Par exemple, considérons l'assertion : $\forall n \in \mathbf{N}, \exists k \in \mathbf{N};\ n \leq k$. Cette assertion est bien évidemment vraie. Tandis que l'assertion : $\exists k \in \mathbf{N};\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \leq k$ est fausse !
On ne peut donc pas intervertir l'ordre des quantificateurs sans changer le sens de l'assertion en général. Lorsque deux quantificateurs **consécutifs** sont de même type (tous deux existentiels ou tous deux universels) c'est toutefois possible :

9. au moins

Proposition 6.25.— Interversion de quantificateurs consécutifs et de même type

- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E\ , P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E\ , P(x,y)$

Exercice : Explicitez la négation des assertions suivantes :

- $(\forall x \in \mathbf{R}),\ (\exists n \in \mathbf{N})\ ;\ x \leq n$
- $(\exists x \in \mathbf{R}),\ (\forall n \in \mathbf{N}),\ x \leq n$

Grâce à ces deux nouveaux symboles, nous pouvons *quantifier* d'autres assertions qui ne sont pas des propriétés des éléments de E.

À titre d'exemple, voyons comment *quantifier* l'inclusion $A \subset B$.
$A \subset B$ est défini par : "tout élément de A est élément de B", que l'on traduit par : pour tout élément x de E, **si** x est élément de A **alors** x est élément de B. D'où la version quantifiée :

$$A \subset B \quad \iff \quad \big(\forall x \in E\big),\ \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big)$$

Comme l'égalité des ensembles se traduit par une double-inclusion, nous obtenons :

$$A = B \quad \iff \quad (\forall x \in E),\ \big(x \in A \iff x \in B\big)$$

Exercice : Quelle est la négation de $A \subset B$?

V Stratégies de démonstration

1 Stratégies pour démontrer une assertion

Soit à démontrer une assertion P. Il existe trois méthodes de démonstration possibles.

1.a La preuve par déduction

Schéma

• **Si** Q est vraie • **Si** $Q \Rightarrow$ est vraie	**Alors** P est vraie

Le principe est très simple et d'**utilisation constante** :
si vous connaissez une propriété Q vraie (un énoncé du cours, une question précédente dans un problème, *etc.*) et que vous prouvez ou savez que $Q \Rightarrow P$ est vraie, **alors** P est vraie.

1.b La preuve par disjonction de cas

Schéma

• **Si** $Q \Rightarrow$ est vraie • **Si** $non(Q) \Rightarrow$ est vraie	**Alors** P est vraie

Là encore, le principe est simple : il est parfois utile de discuter plusieurs cas pour établir la véracité d'une assertion. Dans le schéma ci-dessus, on distingue seulement deux cas, le cas où Q est vraie, et le cas où Q est fausse, mais on peut généraliser à n'importe quelle discussion exclusive de cas.

1.c La démonstration par l'absurde

Schéma

• **Si** $non(P) \Rightarrow Q$ est vraie • **Si** $non(P) \Rightarrow non(Q)$ est vraie	**Alors** P est vraie

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on peut supposer P est faux et montrer que l'on aboutit à une contradiction. Une **contradiction** est une assertion qui est connue pour être fausse. Ce peut être par exemple (Q *et* $non(Q)$) –principe du tiers exclu– comme dans le schéma, ou bien la négation d'un théorème ou d'une proposition du cours.

Exercice : Montrez par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier supérieur ou égal à tous les autres.

2 Stratégies pour démontrer une implication

L'implication est le connecteur logique le plus délicat à comprendre, comme vous vous en doutez, c'est aussi le plus utilisé des mathématiques ! En effet l'énoncé d'un théorème ou d'un exercice de mathématique peut généralement s'écrire sous la forme :
Schéma

	DONNÉES	
HYOTHÈSE(S)	$\Rightarrow$	**CONCLUSION(S)**.

Dans le schéma ci-dessus, les **DONNÉES** contiennent la présentation du contexte de l'exercice : ≪Soit A, B deux parties disjointes d'un ensemble E≫. On peut comprendre aussi dans les données ce qui par ailleurs est connu pour vrai dans le contexte de l'exercice. En l'occurrence, tout ce que je sais sur les parties disjointes dans un ensemble E peut être considéré comme faisant partie des données du problème. Plus généralement, on peut donc penser que les données contiennent tout *ce qui est donné pour vrai*, y compris par exemple le contenu du cours auquel se réfère l'exercice.

Les **HYPOTHÈSES** permettent de préciser la situation dans le contexte général défini dans les **DONNÉES**. On se place dans le cas où ... Les hypothèses sont facilement repérables dans un énoncé, elles sont souvent introduites par "Si", ou bien "Supposons".
La **CONCLUSION** est souvent elle aussi une implication... c'est pourquoi **on ne démarre pas systématiquement par l'hypothèse**, loin de là ! En pratique, lorsque vous attaquez un exercice, le bon réflexe c'est d'**examiner la conclusion** d'abord, c'est elle qui guidera votre démonstration. Posez-vous donc la question suivante : **qu'est-ce qu'on me demande ?** Ensuite seulement, regardez de quels outils et hypothèses vous disposez pour parvenir au résultat.

2.a Formulations équivalentes d'une implication

Les différentes stratégies pour démontrer une implication se fondent sur le lemme suivant :

Lemme 6.26.— Soit P et Q des assertions. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $P \Rightarrow Q$
- $non\, P \text{ ou } Q$
- $non\, Q \Rightarrow non\, P$
- $non\big(P \text{ et } non\, Q\big)$.

Commentaires : ainsi, pour démontrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il est équivalent de démontrer que l'une quelconque des trois autres assertions est vraie.

Démonstration ▽

$$\begin{aligned} P \Rightarrow Q &\iff non\ P\ ou\ Q \\ non\ Q \Rightarrow non\ P &\iff non(non\ Q)\ ou\ non\ P \iff non\ P\ ou\ Q \\ Non\ \big(P\ et\ non\, Q\big) &\iff non\ P\ ounon(non\ Q) \iff non\ P\ ou\ Q \end{aligned}$$

▲

Exercice : Etablissez l'équivalence

$$non\Big[(\forall x \in E), \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big] \quad \iff \quad (\exists x \in E),\ \big(P(x)\ et\ non\, Q(x)\big)$$

Retenez que : la propriété universelle $(\forall x \in E),\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ est fausse *si, et seulement si,* il *existe* un **contre-exemple** x qui vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion.

Solution ▽

$$\begin{aligned} non\ \big[(\forall x \in E),\ P(x) \Rightarrow Q(x)\big] &\iff (\exists x \in E),\ non\ \big[P(x) \Rightarrow Q(x)\big] \\ &\iff (\exists x \in E),\ non\ \big[non\ P(x)\ ou\ Q(x)\big] \\ &\iff (\exists x \in E),\ non\big[non\ P(x)\big]\ et\ \big[non\ Q(x)\big] \\ &\iff (\exists x \in E),\ P(x)\ et\ non\ Q(x). \end{aligned}$$

▲

2.b La preuve directe

En pratique : pour montrer directement $P \Rightarrow Q$, votre démonstration débute par :

- ≪supposons que P est vraie≫.
- ≪montrons que Q est vraie≫.

La démonstration directe est très simple à mettre en œuvre en général. Cependant, il est parfois préférable d'adopter une autre stratégie, par exemple une démonstration par l'absurde ou par contraposée. Afin de vous convaincre de l'utilité des différentes stratégies examinons l'exemple surprenant qui suit.

Exemple : Considérons l'implication

$$(\forall x \in \mathbf{R}),\ \big((x^2 < -1) \Rightarrow (x > 48)\big)$$

On peut remarquer que la prémisse "$(x^2 < -1)$" est toujours fausse ! Que penser alors de l'implication proposée ? Paradoxalement elle est vraie **car** l'assertion "$(x^2 < -1)$" est fausse !

Une preuve directe de cette implication commencerait fort maladroitement par : soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 < -1 \ldots$
Démontrons cette implication en utilisant la première équivalence $(P \Rightarrow Q) \iff (non\,P\ ou\ Q)$. Il vient :

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbf{R}); \big((x^2 < -1) \Rightarrow (x > 48)\big) &\iff (\forall x \in \mathbf{R})\quad non(x^2 < -1)\ ou\ (x > 48)\\ &\iff (\forall x \in \mathbf{R})\quad (x^2 \geq -1)\ ou\ (x > 48)\end{aligned}$$

Comme le carré d'un nombre réel est toujours positif, cette dernière assertion est donc vraie. ☺

2.c La démonstration par contraposée

Définition : *Lorsqu'on décide de démontrer $non\,Q \Rightarrow non\,P$, on dit qu'on fait une **preuve par contraposée**.*

En pratique : pour prouver $P \Rightarrow Q$ par contraposée, votre démonstration débute par :

- ≪supposons que $non\,Q$ est vraie≫.
- ≪montrons que $non\,P$ est vraie≫.

Exercice : Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, démontrez que $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$.

Solution ▽

La preuve sera par contraposée.
Notons P la propriété $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+\star},\ a < b+\varepsilon$ et Q la propriété $a \leq b$. Il s'agit de démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ce qui revient à prouver

$$non\,Q \Rightarrow non\,P$$

Or, la négation de Q est simplement $a > b$. Pour déterminer la négation de P, j'utilise la **Règle 1**, *il vient :*

$$\begin{aligned}non\,P &\iff \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{+\star},\ non(a < b + \varepsilon)\\ &\iff \exists \varepsilon \in \mathbf{R}^{+\star},\ a \geq b + \varepsilon.\end{aligned}$$

Après ces calculs préliminaires, montrons que $non\,Q$ entraîne $non\,P$.
Supposons que $non\,Q$ soit vrai.
Par hypothèse $a > b$. Posons $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2}$. Alors $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}^{+\star}$ et $b + \varepsilon_0 = b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{a+a}{2} = a$.
Ainsi, nous avons construit $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}^{+\star}$ tel que $a \geq b + \varepsilon_0$. Par conséquent $non\,P$ est vrai.
Conclusion : *par contraposée, nous avons démontré que*

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+\star},\ a < b + \varepsilon\right) \Rightarrow a \leq b.$$

▲

2.d La preuve par l'absurde

Définition : *Lorsqu'on décide de montrer que P et $non\,Q$ est faux, on dit qu'on fait une **preuve par l'absurde**.*

En pratique : pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par l'absurde :

- ≪supposons au contraire que P *et non* Q est vrai≫,
- ≪montrons que l'on aboutit à une contradiction≫.

Remarque : Comparée aux autres stratégies, la preuve par l'absurde présente l'avantage d'avoir un maximum d'hypothèses. D'un autre côté, il n'y a pas de conclusion précise dans ce nouvel énoncé. C'est un inconvénient si on se rappelle que la conclusion oriente souvent le début de la démonstration.

Exercice : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrez que

$$\left.\begin{array}{lr}\bullet & f \text{ injective}\\ \bullet & g \circ f \text{ non injective}\end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ non injective}$$

3 Stratégies pour une équivalence

3.a Raisonner par équivalences

Pour prouver l'équivalences de deux assertions P et Q, vous pouvez enchaîner les équivalences comme s'ils s'agissait d'égalités :

$$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff P_N \iff Q$$

et conclure par transitivité que $P \iff Q$.

3.b Procéder par double-implication

Pour démontrer une équivalence, le plus simple est d'enchaîner les équivalences, mais ceci n'est pas toujours possible. On procède alors par **double-implication** :

En pratique : Pour démontrer $P \iff Q$ par double-implication,

- vous montrez $P \Rightarrow Q$, puis
- vous montrez $Q \Rightarrow P$.

3.c Procéder par disjonction de cas

Vous pouvez aussi démontrer l'équivalence $P \iff Q$ par disjonction de cas :

- vous montrez $P \Rightarrow Q$, puis
- vous montrez $(non\, P) \Rightarrow (non\, Q)$.

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrez que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

4 Stratégies pour démontrer une propriété universelle

4.a Cas général

Considérons une propriété universelle, par exemple $\forall x \in E, \quad P(x)$.

- Si elle fait partie de **vos hypothèses**, vous êtes en quelque sorte *utilisateur* de la propriété P : vous pouvez *choisir* de l'appliquer à n'importe quelle valeur de x, à votre guise.
  Neuf fois sur dix, un **choix judicieux** de la valeur de x apportera la clé de votre démonstration.
- Si cette propriété universelle est l'une des **conclusions** que vous devez démontrer.
  Vous n'êtes pas utilisateur de cette propriété. Au contraire, ce qu'on vous demande de faire c'est de montrer que $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x, afin qu'un futur utilisateur puisse **choisir librement** la valeur de x à laquelle il souhaite appliquer P.

En pratique : Pour démontrer $\forall x \in E,\ P(x)$,

- la preuve commence par : "soit $x \in E$" , **arbitraire**, fixé.
- puis vous montrez que $P(x)$ est vraie.

4.b Propriété universelle des entiers naturels

Dans le cas particulier des propriétés universelles des entiers naturels, et seulement dans ce cas, nous disposons d'une *méthode super-puissante* : le **raisonnement par récurrence**. La dernière partie du chapitre y est consacré.

5 Stratégies pour démontrer une propriété existentielle

5.a Cas général

Pour démontrer $\exists x \in E,\ Q(x)$, on peut essayer de *construire* un élément x qui vérifie Q, comme par exemple en résolvant une équation, mais ce n'est pas toujours facile !

5.b Propriété d'existence et d'unicité

La méthode générale qui suit se révèle particulièrement efficace pour démontrer un résultat d'existence et d'unicité :

5.c Le raisonnement par Analyse-Synthèse

L'idée pour démontrer l'**existence et l'unicité** d'un élément x de E vérifiant $Q(x)$ est de déterminer l'ensemble $A = \{x \in E \mid Q(x)\}$.

Méthode : la démonstration s'articule en deux étapes [10].

- **Analyse :** il s'agit de montrer qu'il n'y a qu'un seul candidat possible !
  On suppose qu'un tel x existe, et on montre que nécessairement [11] x est un élément bien déterminé x_0 de E.
- **Synthèse :** il s'agit de vérifier que notre candidat x_0 vérifie Q.
  Pour ce faire, on évalue simplement l'assertion $Q(x_0)$. Deux cas sont possibles
  - soit $Q(x_0)$ est faux auquel cas, le problème posé n'a pas de solution ;
  - soit $Q(x_0)$ est vrai auquel cas [12] le problème admet x_0 pour unique solution.

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application. Il s'agit de démontrer qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, uniques telles que :

$$g \text{ est paire, } h \text{ est impaire, et } f = g + h.$$

Solution $\triangledown$

La preuve sera par **Analyse-Synthèse**.

Analyse : *supposons qu'il existe un couple (g, h) de fonctions telles que g soit paire, h soit impaire et que*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = g(x) + h(x).$$

Soit $x \in \mathbf{R}$, pour valoriser nos hypothèses, choisissons d'appliquer la propriété universelle ci-dessus à x et à $-x$.

Comme g est paire et h est impaire, il vient : $\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{cases}$.

En particulier, en ajoutant membre à membre ces deux égalités, j'obtiens que $g(x)$ vérifie nécessairement $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

De même en retranchant membre à membre ces deux égalités, j'obtiens $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Ainsi, **s'il existe** *un couple vérifiant les trois conditions imposées, ce ne peut être que le couple (g_0, h_0) défini par*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g_0(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h_0(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Synthèse : *il s'agit de vérifier que le couple (g_0, h_0), notre seul candidat, est effectivement solution du problème.*

- *g_0 est paire car,* $\forall x \in \mathbf{R},\ g_0(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = g_0(x)$.
- *h_0 est paire car,* $\forall x \in \mathbf{R},\ h_0(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h_0(x)$.
- $f = g_0 + h_0$ *car* $\forall x \in \mathbf{R},\ g_0(x) + h_0(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$.

Conclusion : *Par* **Analyse-synthèse**, *nous avons démontré qu'il n'existe qu'un unique couple (g, h) de fonctions vérifiant les trois conditions imposées.* ▲

VI Démonstration par récurrence

Propriétés fondamentales de N

La proposition suivante résume les propriétés fondamentales de $\mathbf{N}$.

Proposition 6.27.— L'ensemble $\mathbf{N}$, non vide, *totalement ordonné* [13] par $\leq$ vérifie :
($\mathbf{N}_1$) Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ a un plus petit élément.
($\mathbf{N}_2$) Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ a un plus grand élément.
($\mathbf{N}_3$) $\mathbf{N}$ n'a pas de plus grand élément.

10. comme la preuve par double-inclusion d'une égalité ensembliste
11. Ceci revient à prouver l'inclusion $A \subset \{x_0\}$
12. l'inclusion $\{x_0\} \subset A$ est vraie

Remarque : à partir des trois propriétés fondamentales de $\mathbf{N}$ rappelées ci-dessus, on peut donner à $\mathbf{N}$ une allure *naturelle* :

- $\mathbf{N}$ a un plus petit élément, qui est noté 0.
- $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ a un plus petit élément, qui est noté 1, etc.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, la partie $\{p \in \mathbf{N};\ p > n\}$ est non vide (sinon $\mathbf{N}$ serait majoré !). Elle a donc un plus petit élément appelé **successeur** de n, que l'on note $n+1$.
- $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, la partie non vide et majorée $\{p \in \mathbf{N};\ p < n\}$ possède un plus grand élément, appelé le **prédécesseur** de n, noté $n-1$.

Les notions de successeur et prédécesseur servent évidemment de base à l'addition des entiers naturels.

1 Principe de récurrence

Nous avons vu au chapitre précédent comment démontrer certaines propriétés *universelles* d'un ensemble E. Lorsque l'ensemble est $\mathbf{N}$, nous disposons d'une méthode *sur-puissante* que vous connaissez déjà. Cette méthode repose sur le principe de récurrence présenté ci-après.

1.a Propriété héréditaire

Définition : *Soit $\mathcal{P}$ une propriété des nombres entiers*[14]*. On dit que $\mathcal{P}$ est **héréditaire** si elle vérifie :*

$$(\forall n \in \mathbf{N}),\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

Commentaires : $\mathcal{P}$ est héréditaire si dès qu'un entier n a la propriété, son **successeur** $n+1$ en **hérite**.

Exercice : Montrez que la propriété $\mathcal{P}(n) : 0+1+\cdots+n = \dfrac{n\ (n+1)}{2}$ est héréditaire.

Solution $\triangledown$

Il s'agit de prouver l'implication : $\forall n \in \mathbf{N},\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ arbitraire fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $1+\cdots+n = \frac{n\ (n+1)}{2}$. Montrons que $n+1$ hérite de cette propriété :

$$\begin{aligned} 0+1+\cdots+n+(n+1) &= \big(0+1+\cdots+n\big)+(n+1) = \frac{n\ (n+1)}{2}+(n+1) \\ &= (n+1)\ \times\ \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)\,(n+1+1)}{2} \end{aligned}$$

▲

1.b Théorème de la récurrence simple

Dans l'exercice ci-dessus, nous avons prouvé que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \tag{6.3}$$

De plus, on vérifie aisément que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $0 = \dfrac{0 \times 1}{2}$.
Ainsi,

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \text{et}^{15}\ \mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1) \text{ est vraie} \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{r} \text{donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie} \\ \text{et } \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2) \text{ est vraie} \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{r} \text{donc } \mathcal{P}(2) \text{ est vraie} \\ \text{et } \mathcal{P}(2) \Rightarrow \mathcal{P}(3) \text{ est vraie} \end{array}\right\}\ \textit{etc.}$$

De "*proche en proche*", on comprend sur cet exemple qu'une propriété héréditaire $\mathcal{P}$ des entiers naturels telle que $\mathcal{P}(0)$ soit vraie sera automatiquement vérifiée par tous les entiers naturels. En clair :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{P}(n)$$

14. *i.e.* une application de $\mathbf{N}$ vers $\{Vrai,\ Faux\}$
15. la propriété universelle (6.3) appliquée par l'*utilisateur malin* à l'entier $n = 0$ montre que

Toutefois, le procédé ci-dessus ne saurait constituer une démonstration, à cause des points de suspension, des "*etc*", ou autres "*ainsi de suite*". Pour conclure rigoureusement cette démonstration, il faut invoquer le **Principe de récurrence** :

Théorème 6.28.— Théorème de récurrence simple —. Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \bullet & \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \bullet & (\forall n \in \mathbf{N}),\ \big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big) \end{cases}}$$

Commentaires : ce théorème établit une équivalence entre deux énoncés. Il s'agit donc d'une nouvelle **stratégie** de démonstration spécialement adaptée aux **propriétés universelles des entiers naturels**.

Démonstration $\triangledown$

$\boxed{\Rightarrow}$ Évident !

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $F = \{n \in \mathbf{N} \mid non\ \mathcal{P}(n)\}$. Il faut montrer que F est vide... **Raisonnons par l'absurde** et supposons que $F \neq \emptyset$. D'après ($\mathbf{N}_1$) F possède alors un plus petit élément. Appelons-le n_1. Alors $n_1 \in \mathbf{N}$ et $\mathcal{P}(n_1)$ est faux. Comme par hypothèse $\mathcal{P}(0)$ est vraie, $n_1 \neq 0$, par conséquent $n_1 > 0$. Considérons à présent le prédécesseur $n_1 - 1$ de n_1. D'après ce qui précède, $n_1 \geq 0$. D'autre part, comme n_1 est le plus petit élément de F, $n_1 - 1 \notin F$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n_1 - 1)$ est vraie.

Posons $n_0 = n_1 - 1$. Nous avons démontré que l'entier naturel $n_0 \in \mathbf{N}$ vérifie $\mathcal{P}$ et pourtant son successeur n_1 ne vérifie pas $\mathcal{P}$, ce qui **contredit** l'implication $(\forall n \geq 0)(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$. ▲

1.c Pratique de la récurrence

Considérons une propriété $\mathcal{P}$ des entiers naturels. D'après le principe de récurrence l'énoncé initial

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{P}(n)$$

est équivalent à

- **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie
- **Hérédité :** $\big(\forall n \in \mathbf{N}\big)$, $\big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big)$.

Méthode : Démontrer la propriété universelle $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$ par récurrence, c'est prouver cet énoncé équivalent !

La rédaction d'une démonstration par récurrence s'articule en trois étapes :

- **Initialisation :** vous vérifiez que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** il s'agit de montrer que $\mathcal{P}$ est héréditaire. Votre démonstration débute par : ≪*Soit* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie. Je montre que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*≫ ...
- **Conclusion :** vous devez invoquer le **principe de récurrence**.

Vocabulaire : *lors de la démonstration de l'hérédité, l'hypothèse* ≪$\mathcal{P}(n)$ *est vraie*≪*s'appelle l'**hypothèse de récurence**.*

1.d Mise en œuvre

Exercice : Montrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $11^{n+1} + 10 \times 4^n$ est divisible par 7.

Solution $\triangledown$

Avant de débuter la récurrence proprement dite, identifions précisément la propriété des entiers naturels à prouver :

Soit $\mathcal{P}$ *la propriété définie par :* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie si et seulement si* 7 *divise* $11^{n+1} + 10 \times 4$. *Montrons par récurrence que* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

• Initialisation :

$11^{0+1} + 10 \times 4^0 = 21$ *est divible par 7 donc* $\mathcal{P}(0)$ *est vraie.*

• Hérédité :

Soit $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $\mathcal{P}(n)$ *soit vraie. Montrons que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie :*

$$\begin{aligned} 11^{n+2} + 10 \times 4^{n+1} &= (7+4) \times 11^{n+1} + 10 \times 4^{n+1} \\ &= 7 \times 11^{n+1} + 4 \times \big(11^{n+1} + 10 \times 4^n\big). \end{aligned}$$

Par **hypothèse de récurrence** $11^{n+1} + 10 \times 4^n$ *est divisible par 7. Il découle alors immédiatement de l'égalité ci-dessus que* $11^{n+2} + 10 \times 4^{n+1}$ *l'est aussi.*
• **Conclusion :** *Par récurrence sur* $n \in \mathbf{N}$, *nous avons prouvé que pour tout entier naturel* $n \in \mathbf{N}$, $11^{n+1} + 10 \times 4$ *est divisible par 7.* ▲

2 Généralisations

2.a Récurrence incomplète

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$, pour démontrer une propriété universelle du type : $\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n)$, vous utiliserez le

Théorème 6.29.— Théorème de récurrence incomplète —. Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$, $n_0 \in \mathbf{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \bullet \ \textbf{Initialisation :} & \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \bullet \ \textbf{Hérédité :} & (\forall n \geq n_0), \ \big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big) \end{cases}$$

Démonstration ▽
Il suffit d'appliquer le théorème de la récurrence à la nouvelle propriété des entiers naturels $\mathcal{Q}$ définie pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}$ par $\mathcal{Q}(k) \iff \mathcal{P}(n_0 + k)$. ▲

Exercice : Démontrez que $\forall n \geq 8, \quad 2^n > 18\,(n+1)$.

Solution ▽
Soit $\mathcal{P}$ *la propriété que peuvent ou non posséder les entiers naturels définie par :* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie si, et seulement si* $2^n > 18(n+1)$.
Montrons par récurrence que $\forall n \geq 8, \mathcal{P}(n)$.
• **Initialisation :** *je vérifie que 8 a la propriété* $\mathcal{P}$.
$2^8 = 256$, $18 \times 9 = 162$. *Donc* $2^8 > 18 \times (8+1)$.

• **Hérédité :** *soit* $n \geq 8$ *un entier naturel tel que* $\mathcal{P}(n)$ *est vrai. Montrons que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &> 2 \times 18\,(n+1) = 18 \times (2n+2) \\ &> 18\,(n+2). \end{aligned}$$

• **Conclusion :** *la propriété* $\mathcal{P}$ *est vraie pour* $n = 8$, *elle est héréditaire à partir de* $n = 8$, *d'après le principe de récurrence, nous avons prouvé que* $\forall n \geq 8, \quad 2^n > 18\,(n+1)$. ▲

2.b Récurrence double

Il se peut aussi que la relation d'hérédité porte sur plusieurs *générations*. Citons par exemple, le :

Théorème 6.30.— Théorème de récurrence double —. Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$, $n_0 \in \mathbf{N}$.

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \bullet \ \textbf{Initialisation :} & \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \bullet \ \textbf{Hérédité :} & (\forall n \geq n_0), \ \big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\big) \end{cases}$$

Démonstration ▽
Appliquez le théorème de la récurrence à la nouvelle propriété des entiers naturels $\mathcal{Q}$ définie pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}$ par $\mathcal{Q}(k) \iff \mathcal{P}(n_0 + k)$ et $P(n_0 + k + 1)$. ▲

Exercice : Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrez que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n.$$

Solution ▽
Soit $\mathcal{P}$ *la propriété des entiers définie par* $\mathcal{P}(n) \iff u_n = 3^n - 2^n$.

• **Initialisation :**
Comme $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ *et* $3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$, 0 *et* 1 *vérifient la propriété* $\mathcal{P}$.
• **Hérédité :**

Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ **et** *$\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies*[16]*, montrons que $n+2$ en hérite :*
Par construction de la suite u, nous savons que $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Par hypothèses de récurrence, nous en déduisons :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ & = & 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) \\ & = & 3^n(15-6) - 2^n(10 - +6) \\ & = & 3^{n+2} - 2^{n+2} \end{array}$$

• **Conclusion :** *par récurrence double, nous avons prouvé que* $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n$. ▲

2.c Récurrence forte

Il se peut aussi que la relation d'hérédité porte sur tous les prédécesseurs... en remontant jusqu'aux origines. En appliquant le théorème de récurrence à la propriété $Q(n)$ définie par :

$$Q(n) \iff (\forall k \in \{n_0, \ldots, n\},\ \mathcal{P}(k)),$$

nous obtenons le :

Théorème 6.31.— Théorème de récurrence forte —. Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbf{N}$, $n_0 \in \mathbf{N}$.

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \bullet \ \textbf{Initialisation :} & \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \bullet \ \textbf{Hérédité :} & (\forall n \geq n_0),\ \big(\mathcal{P}(n_0) \textbf{ et } \cdots \textbf{ et } \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}}$$

Exercice : Montrez que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

16. l'hypothèse de récurrence porte sur deux générations successives