TECHNIQUES & MÉTHODES S01

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

CALCULS DANS R

■■■ Calculer une somme ou un produit fini

Je sais calculer des sommes et produits finis

- à l'aide d'un récurrence ;
- à l'aide d'un changement d'indice, ou d'un télescopage
- en utilisant l'identité géométrique ou la formule du binôme de Newton (pour une somme)

■■■ Changements d'indice

Je sais calculer la somme $\sum_{i=0}^{q-p} x_{p+i}$ à l'aide du changement d'indice $\boxed{k = p+i}$,

$\boxed{1}$ je pose $k = p + i$

$\boxed{2}$ je remplace i par $k - p$ dans la somme ;

$\boxed{3}$ je détermine les bornes pour k : lorsque i varie de 0 à $q - p$, k varie de p à q.

Exercice 1 : Soit $0 \leq p \leq n$. Montrez que $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}$. *Réponse :* on effectue le chgt d'indice $j = n - k$ au numérateur et $\ell = p - k$ au dénominateur : $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(p-k)} = \frac{\prod_{j=n-p+1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{p} \ell} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ▲

■■■ Manipuler des inégalités

Encadrer une somme

Pour majorer (resp. minorer, encadrer) la somme $\sum_{k=0}^{n} x_k$,

$\boxed{1}$ je considère $k \in \{0, \ldots, n\}$, je majore (resp. minore, encadre) x_k. Ainsi, Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k \leq M_k$.

$\boxed{2}$ puis j'ajoute terme à terme toutes ces majorations $\sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} M_k$.

Exercice 2 : Montrez que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbf{N}^\star$, $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{n+1}{n^2}$. *réponse :* Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De l'encadrement $0 \leq k \leq n$, je tire $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2}$. En sommant terme à terme ces $n + 1$ encadrements, il vient $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2}$, soit $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{n+1}{n^2}$. ▲

Calculer une partie entière

Pour calculer une partie entière, on revient souvent à la définition en encadrant le réel x entre deux entiers consécutifs. Pour prouver que $\lfloor x \rfloor = n$, j'établis l'encadrement $n \leq x < n + 1$.

Majorer ou minorer la valeur absolue d'une somme

J'utilise l'inégalité triangulaire *kivabien.*

ÉQUATIONS DANS R

■■■ Résoudre une équation polynomiale

Pour une équation de degré inférieur ou égal à 2, les formules du cours s'appliquent. Pour les équations de degré supérieur ou égal à 3, je cherche à abaisser le degré de l'équation au moyen

- d'une factorisation (racine évidente, identité remarquable)
- d'un changement d'inconnue

Exercice 3 : Résoudre dans **R** l'équation $x^3 - 9x + \frac{20}{x} = 0$. *réponse :* $x^3 - 9x + \frac{20}{x} = 0 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 - 9x + \frac{20}{x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0, X = x^2 \\ X^2 - 9X + 20 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0, X = x^2 \\ X = 4 \text{ } OU \text{ } X = 5 \end{cases} \iff \left\{ x \neq 0, x^2 = 4 \text{ } OU \text{ } x^2 = 5 \right.$ Ainsi, $\mathcal{S} = \{\pm 2, \pm\sqrt{5}\}$ ▲

■■■ Résoudre un système d'équations linéaires

Je mets en œuvre la méthode d'élimination de Gauss.