TECHNIQUES & MÉTHODES S17

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis!

STRUCTURES ALGÉBRIQUES FONDAMENTALES

■■■ Lois de composition interne

Comment étudier une lci ?

Pour étudier une l.c.i. $\star : E \times E \to E$, vous devez :

$\boxed{0}$ vérifier qu'il s'agit bien d'une l.c.i. : le composé $x \star y$ de deux éléments de E appartient-il toujours à E ?

$\boxed{1}$ vérifier si $\star$ est commutative;

$\boxed{2}$ vérifier si $\star$ est associative;

$\boxed{3}$ vérifier l'existence d'un élément neutre : s'il existe, il satisfait $\forall x \in E,\ x \star e = e \star x = x$

$\boxed{4}$ déterminer les éléments inversibles x : ce sont ceux pour lesquels le système d'inconnue $y \in E$ $\left\{\begin{array}{lcl} x \star y & = & e \\ y \star x & = & e \end{array}\right.$ admet une solution.

Comment calculer les itérés d'un élément ?

Vous pouvez :

- calculer x^2, x^3 ;
- conjecturer l'expression de x^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$;
- démontrer cette relation par récurrence.

■■■ Groupes

Comment démontrer que H est un sous-groupe de G

C'est la question basique. Pour y répondre, il s'agit de vérifier d'après la **caractérisation des sous-groupes** que

$$\begin{array}{lcc} (SG_1) & \bullet & H \neq \emptyset \qquad (1_G \in H) \\ (SG_2) & \bullet & \forall (x,y) \in H^2 \times H,\ x.y^{-1} \in H \end{array}$$

Pour alléger les vérifications, on utilise aussi parfois la version suivante :

$$\begin{array}{lcc} (SG_1) & \bullet & H \neq \emptyset \qquad (1_G \in H) \\ (SG_{21}) & \bullet & \forall (x,y) \in H^2 \times H,\ x \times y \in H \\ (SG_{22}) & \bullet & \forall x \in H \times H,\ x^{-1} \in H \end{array}$$

Parfois, on peut aussi utiliser les pistes suivantes :

- H est décrit en compréhension : s'agirait-il du noyau d'un morphisme de groupes ?
- H est décrit en extension : s'agirait-il de l'image d'un morphisme de groupes ?

En ce cas, on sait que l'image et le noyau d'un morphisme sont des sous-groupes.

Remarque : Ces méthodes sont aussi utiles pour prouver que H est un groupe!

Nb : le fait que l'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe peut éventuellement être utilisé à l'oral avec l'accord du jury (cette proposition n'est pas au programme!)

■■■ Morphismes de groupes

Comment reconnaître un morphisme de groupes

Pour démontrer qu'une application entre deux groupes G et G' est un morphisme, vous utilisez la définition. Il s'agit de vérifier que f est compatible avec les lois de ces groupes.

Remarque : pour être un morphisme de groupe, f doit nécessairement envoyer le neutre de G sur le neutre de G' !

Comment déterminer le noyau d'un morphisme de groupes

Par définition, $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = 1_{G'}\}$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$, vous devez donc :

- résoudre l'équation d'inconnue $x \in G$, $\qquad f(x) = 1_{G'} \qquad (E)$
- $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions de (E).

Comment démontrer qu'un morphisme de groupes est injectif

Vous utilisez le noyau de f. Il s'agit d'après la **caractérisation des morphismes injectifs** de prouver que $\operatorname{Ker} f = \{1_G\}$. Comme 1_G appartient nécessairement au noyau de G, une seule inclusion suffit :
Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, *i.e.* $f(x) = 1_{G'}$.
Il s'agit de vérifier que $x = 1_G$.

■ ■ ■ Anneaux et corps

Comment démontrer que B un sous-anneau ?

Pour démontrer qu'une partie B est un sous-anneau, ou un sous-corps, vous utilisez systématiquement les caractérisations.

Comment montrer que B est un sous-anneau de A

- (SA_0) montrer que $B \subset A$
- (SA_1) vérifier que $1_A \in B$
- (SA_2) vérifier que $\forall(a, b) \in B \times B,\ a - b \in B$
- (SA_3) vérifier que $\forall(a, b) \in B \times B,\ a \times b \in B$.

Cette méthode s'applique aussi pour vérifier que B est un anneau. Il s'agit alors de «deviner»un anneau A dont B serait un sous-anneau et d'appliquer la caractérisation.

Comment montrer que L est un sous-corps de K

- (SC_0) montrer que $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$
- (SC_1) vérifier que $1_{\mathbf{K}} \in \mathbf{L}$
- (SC_2) vérifier que $\forall(a, b) \in \mathbf{L} \times \mathbf{L},\ a - b \in \mathbf{L}$
- (SC_3) vérifier que $\forall(a, b) \in \mathbf{L} \times \mathbf{L}^{\star},\ a \times b^{-1} \in \mathbf{L}$.

Comment calculer dans un anneau ?

Les calculs dans un anneau, sont très proches de ceux dans **R** ou **C**. Il y a cependant quelques pièges à éviter :

- un anneau n'est pas toujours commutatif. Lorsque vous utilisez les **formules du binôme** et autres **identités géométriques** vérifiez clairement que les éléments que vous considérez commutent.
- dans un anneau tout élément – même non nul– n'est pas inversible, ni simplifiable pour la multiplication !
- un anneau n'est pas toujours intègre ! Un produit peut être nul sans pour autant qu'aucun des facteurs ne le soit !

■ ■ ■ Groupe symétrique

Comment décomposer une permutation en produit de transpositions

Plusieurs techniques sont possibles :

- Pour décomposer le cycle $c = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ en produit de transpositions, vous utilisez

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_p \end{pmatrix}$$

- Pour décomposer une permutation σ quelconque, vous «redressez »σ en l'identité par une succession de transpositions :

$$\tau_N \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma = id.$$

  Comme chacune des transpositions τ_i est involutive, vous en déduisez –en passant aux inverses– que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_N$$

- Pour décomposer une permutation en produits de cycles à supports disjoints, rien de plus simple, mais ce n'est pas au programme.

Comment calculer la signature d'une permutation

- par définition, la signature de σ est $(-1)^{I(\sigma)}$. Tout revient à déterminer le nombre d'inversions de σ. Par ce faire, vous ajoutez, pour chaque terme de la deuxième ligne, le nombre de valeurs à sa droite qui lui sont strictement inférieures.
- la signature d'un p cycle est $p - 1$. En particulier, la signature d'une transposition est -1.
- vous pouvez aussi calculer la signature d'une transposition à l'aide d'une décomposition. Par exemple, si $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$, alors

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_2) \times \varepsilon(\sigma_1)$$

  car la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes.