Chapitre 26

Représentation matricielle en dimension finie

Sommaire

OBJECTIFS

▷

▷

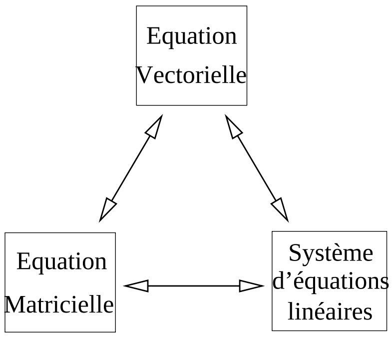
▷

▷

Introduction

Ce chapitre est l'occasion de présenter les liens fondamentaux qui unissent en dimension finie, familles de vecteurs, applications linéaires, systèmes d'équations linéaires et matrices :

Pour avoir déjà pratiqué l'algèbre linéaire dans $\mathbf{K}^n$, nous savons que les questions importantes portant sur les familles de vecteurs aussi bien que sur les applications linéaires se traduisent par des systèmes d'équations linéaires en les coordonnées.
L'existence de bases en dimension finie nous permet de généraliser ces constructions. Comme un système d'équations linéaires peut à son tour être traduit sous la forme d'une équation matricielle, nous retrouvons dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie les trois points de vue :



Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

I Représentation matricielle des vecteurs

A chaque famille finie de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E dont une base $\mathcal{E}$ est donnée, nous allons associer de manière unique une matrice, appelée matrice représentative de la famille relativement à la base $\mathcal{E}$. Avant de présenter cette construction dans le cas général, découvrons au travers d'un exemple simple comment cette matrice apparaît de façon naturelle lorsqu'on s'intéresse au caractère générateur ou libre d'une telle famille.

Exemple introductif

Soit E_4 un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 4 dont une base est donnée par $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. On considère la famille $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} \vec{a}_1 & = & \vec{e}_1 & +2\cdot\vec{e}_2 & & +\vec{e}_4 \\ \vec{a}_2 & = & 2\cdot\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & +2\cdot\vec{e}_3 & -\vec{e}_4 \\ \vec{a}_3 & = & \vec{e}_1 & +\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 & -\vec{e}_4 \end{array}\right.$$

Intéressons-nous à la dépendance linéaire de la famille $\mathcal{A}$ ainsi définie.

Soit donc $(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3) \in \mathbf{K}^3$ tels que

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}_E \tag{26.1}$$

Cette **équation vectorielle** se traduit par

$$\begin{aligned}(26.1) &\iff \lambda_1 \cdot (\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_4) + \lambda_2 \cdot (2\cdot\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\cdot\vec{e}_3 - \vec{e}_4) + \lambda_3 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = \vec{0}_E \\ &\iff (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)\cdot\vec{e}_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\cdot\vec{e}_2 + (2\lambda_2 - \lambda_3)\cdot\vec{e}_3 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\cdot\vec{e}_4 = \vec{0}_E\end{aligned}$$

Comme par hypothèse la famille $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3;\vec{e}_4)$ est une base, elle est en particulier libre. Par conséquent, la seule combinaison linéaire des $(\vec{e}_i)$ qui donne $\vec{0}_E$ est la combinaison linéaire triviale. Ainsi

$$(26.1) \iff \begin{cases} \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 = 0 \\ & 2\lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce **système d'équations linéaires** se traduit par l'**équation matricielle**

$$A \times \Lambda = 0, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est la matrice représentative de la famille $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$: *ses colonnes sont* tout simplement *les coordonnées des vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{a}_3$ dans la base $\mathcal{E}$.*

I.1 Matrice représentative d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Soit E_n un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1;\ldots;\ \vec{e}_n)$ une base de E_n.
D'après la **caractérisation des bases**, tout vecteur $\vec{a}$ de E_n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $\vec{e}_i$:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{e}_n.$$

Autrement dit, $\vec{a}$ est entièrement et uniquement déterminé par ses coordonnées $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ dans la base $\mathcal{E}$:

Définition : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base $\mathcal{E}$.*

- *On définit la **matrice-colonne** $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, **représentative du vecteur** $\vec{a}$ **dans la base** $\mathcal{E}$ par :*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- *Plus généralement, considérons $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ une famille de p vecteurs de E_n tels que*

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{1,1}\cdot\vec{e}_1 + \cdots + a_{n,1}\cdot\vec{e}_n \\ \vec{a}_2 &= a_{1,2}\cdot\vec{e}_1 + \cdots + a_{n,2}\cdot\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{a}_p &= a_{1,p}\cdot\vec{e}_1 + \cdots + a_{n,p}\cdot\vec{e}_n. \end{aligned}$$

*On définit la **matrice** $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, **représentative de la famille** $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{E}$ par :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_1) & \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_2) & & \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_p) \\ \swarrow & \swarrow & & \swarrow \end{array} \\ \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

En pratique : pour déterminer la matrice représentative $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$:

- décomposez $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$ dans la base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$
- rangez leurs coordonnées en colonnes.

Exemple : bien entendu, dans l'exemple introductif $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice : On considère dans $E = \mathbf{R}_2[X]$, les polynômes $P_0 = 1 + X^2$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = 1 + 2X + X^2$ et la famille $\mathcal{A} = (P_0, P_1, P_2)$.
Déterminez la matrice représentative de $\mathcal{A}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$.

Solution ▽
Par définition, les colonnes de la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ représentative de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont les coordonnées des vecteurs $P_0; P_1; P_2$ dans la base canonique. Comme

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 1 \cdot X^2 \\ P_1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \\ P_2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2, \end{aligned}$$

j'en déduis en rangeant les coordonnées de ces vecteurs en colonnes que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ▲

I.2 Isomorphismes de E_n sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

Etant donné un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E_n de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Le fait que tout vecteur $\vec{x}$ est déterminé de façon unique par sa matrice représentative dans la base $\mathcal{E}$ se traduit par :

Proposition 26.1.— Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
L'application
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ & \vec{x} & \mapsto & \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) \end{array}$$
qui à tout vecteur $\vec{x}$ de E_n associe sa matrice-colonne représentative est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Commentaires : autrement dit, *le choix d'une base* de E_n permet d'identifier les vecteurs de E_n à des matrices colonnes.

Vocabulaire : *étant donnée une matrice colonne* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*, on appelle **vecteur canoniquement associé** à X, le vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$.*

Démonstration ▽

- **linéarité :** Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. On suppose que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ se décomposent dans la base $\mathcal{E}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{l|l} \lambda\times & \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + x_n \cdot e_n \\ \mu\times & \vec{y} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + y_n \cdot \vec{e}_n \end{array}$$

$$\text{il s'ensuit que} \quad \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1) \cdot \vec{e}_1 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) \cdot \vec{e}_n$$

Par définition de Φ, il en résulte que

$$\Phi(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \Phi(\vec{x}) + \mu \cdot \Phi(\vec{y})$$

- Pour démontrer que Φ est un isomorphisme, utilisons la caractérisation des isomorphismes par les bases (**Théorème** 24.17) :
  Par construction de Φ, nous avons
  $\Phi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\Phi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $\Phi(\vec{e}_n) = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$. Or, la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Il en résulte que Φ est un isomorphisme. ▲

En pratique : vous pouvez utiliser –*sans le mentionner*– cet isomorphisme en rédigeant vos calculs vectoriels sous forme de calculs matriciels comme dans l'***Exercice*** ci-dessous.

Exercice : Avec les notations de l'***Exercice*** précédent, montrez que $(P_0; P_1; P_2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Solution ▽

Il s'agit d'une famille de **trois** *vecteurs de* $\mathbf{R}_2[X]$. *Montrons qu'elle est libre :*
Soit donc $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^3$ *tel que*

$$\lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 = 0 \tag{26.2}$$

Cette équation vectorielle se traduit dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ *par l'***équation matricielle**

$$(26.2) \iff \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

En identifiant les coordonnées, on en déduit aisément que (26.2) *est équivalente au* **système d'équations linéaires** *homogène*

$$\begin{aligned}(26.2) &\iff \begin{cases}\lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 = 0\\ & \lambda_1 & +2\lambda_2 = 0\\ \lambda_0 & & +\lambda_2 = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 = 0\\ & \lambda_1 & +2\lambda_2 = 0\\ & \lambda_1 & = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda_0 & +\lambda_1 & +\lambda_2 = 0\\ & \lambda_1 & +2\lambda_2 = 0\\ & & 2\lambda_2 = 0\end{cases}\end{aligned}$$

Le système obtenu est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux non nuls, il s'agit donc d'un système de CRAMER. *Par conséquent, il admet une unique solution : le triplet* $(0, 0, 0)$.
Ainsi, la famille (P_0, P_1, P_2) *est libre dans* $\mathbf{R}_2[X]$. *Comme* $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}_2[X] = 3$, *elle est donc libre et maximale. On conclut à l'aide de la* **caractérisation des bases en dimension finie**, *que la famille* $(P_0; P_1; P_2)$ *est une base de* $\mathbf{R}_2[X]$. ▲

I.3 Caractérisation matricielle des bases de E

Théorème 26.2.— Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ une famille de n vecteurs de E. Notons $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ la matrice représentative de $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{E}$. Alors

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est une base de } E \quad \textit{si et seulement si} \quad A \text{ est inversible}}$$

Démonstration ▽

t calcul préliminaire : pour tout n-uplet $\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires, notons $\Lambda =^t (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$.
isant l'isomorphisme Φ de représentation matricielle, on obtient aisément les équivalences :

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}_E &\iff \lambda_1 \cdot \Phi(\mathsf{A}_1) + \cdots + \lambda_n \cdot \Phi(\mathsf{A}_n) = \vec{0}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\\ &\iff (S) \qquad A \times \Lambda = \vec{0}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant successivement la caractérisation des bases en dimension finie et le lien fondamental entre systèmes de CRAMER et matrices inversibles, il vient :

$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est une base de E *si et seulement si* $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ est libre (maximale)
si et seulement si (S) est de CRAMER ▲
si et seulement si A est inversible.

Exemple : Soit $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de E, échelonnée en degré. La matrice représentative dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ cette famille est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible. Par conséquent, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

II Représentation matricielle des applications

Dans cette partie, E_p désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p et F_n un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n munis de bases notées respectivement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Etant donnée une application linéaire $a \in \mathcal{L}(E, F)$, les questions de la surjectivité et de l'injectivité de a se ramènent –comme nous y sommes habitués– à l'étude de systèmes d'équations linéaires. La matrice des coefficients de ces systèmes est la matrice représentative de a.

Exemple introductif

Soient E_4 et F_3 des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

✓ comme une application linéaire de E vers F est entièrement déterminée par les images $a(\vec{e}_1), \dots, a(\vec{e}_4)$, il existe une unique application linéaire $a : E \to F$ telle que

$$\begin{array}{r|l} x_1\times & a(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 - 2\cdot\vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ x_2\times & a(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3 \\ x_3\times & a(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 + 2\cdot\vec{f}_2 \\ x_4\times & a(\vec{e}_4) = \vec{f}_1 - \vec{f}_3 \end{array}$$

Elle est définie pour tout $\vec{x} = x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3 + x_4\cdot\vec{e}_4 \in E$, par :

$$a(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\cdot\vec{f}_1 + (-2x_1 + x_2 + 2x_3)\cdot\vec{f}_2 + (x_1 - x_2 - x_4)\cdot\vec{f}_3$$

✓ Intéressons-nous à présent à la surjectivité de a :

Soit $\vec{y} = y_1\cdot\vec{f}_1 + y_2\cdot\vec{f}_2 + y_3\cdot\vec{f}_3 \in F_3$. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E, nous pouvons chercher les antécédents de $\vec{y}$ par a sous la forme $\vec{x} = x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3 + x_4\cdot\vec{e}_4$. Comme $\mathcal{F}$ est une base de F, l'**équation vectorielle**

$$a(x_1\cdot\vec{e}_1 + x_2\cdot\vec{e}_2 + x_3\cdot\vec{e}_3 + x_4\cdot\vec{e}_4) = y_1\cdot\vec{f}_1 + y_2\cdot\vec{f}_2 + y_3\cdot\vec{f}_3 \tag{26.3}$$

est équivalente au **système d'équations linéaires**

$$(26.4) \iff \left\{\begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = y_1 \\ -2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = y_2 \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 = y_3 \end{array}\right.$$

qui se traduit finalement par l'**équation matricielle** :

$$A\times X = Y, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La matrice A dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ des vecteurs $a(\vec{e}_1)$, $a(\vec{e}_2)$, $a(\vec{e}_3)$ et $a(\vec{e}_4)$ est la matrice représentative de l'application linéaire a relativement aux bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$.

Remarque : En poursuivant la résolution de ce système, on montre que a est surjective. De même, la question de l'injectivité de a se ramène à la résolution du système d'équations homogène $A\times X = 0$. Ce système admettant une infinité de solutions, l'application n'est pas injective.

II.1 Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases

Plus généralement, étant donnés deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E_p et F_n de bases respectives $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$, une application linéaire $a \in \mathbf{K}(E_p, F_n)$ est entièrement déterminée par les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ des vecteurs $a(\vec{e}_1), \ldots, a(\vec{e}_p)$. Plus précisément,

Définition : *Soient $a \in L(E_p, F_n)$ une application linéaire de E_p dans F_n, $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ une base de F_n.*
On suppose que

$$\begin{array}{ccccccccc} a(\vec{e}_1) & = & a_{1,1} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,1} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,1} \cdot \vec{f}_n \\ a(\vec{e}_2) & = & a_{1,2} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,2} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,2} \cdot \vec{f}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a(\vec{e}_p) & = & a_{1,p} \cdot \vec{f}_1 & + & a_{2,p} \cdot \vec{f}_2 & + & \cdots & + & a_{n,p} \cdot \vec{f}_n \end{array}$$

*On appelle **matrice représentative de** a dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et on note $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$, la matrice définie par*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_1), \ldots, a(\vec{e}_p)) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_1)) & \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_2)) & & \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_p)) \\ \swarrow & \swarrow & & \swarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Commentaires : $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est la matrice représentant dans la base $\mathcal{F}$, les vecteurs $a(\vec{e}_1), a(\vec{e}_2), \ldots, a(\vec{e}_p)$: ses colonnes sont donc les coordonnées des vecteurs $a(\vec{e}_1)$, $a(\vec{e}_2)$, $\ldots$, $a(\vec{e}_p)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Notation : *Lorsque $E = F$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, on peut choisir la même base $\mathcal{E}$ au départ et à l'arrivée. On notera alors simplement*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(a) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a)$$

*la **matrice représentative d'un endomorphisme** a de E.*

Exemples :

1. Si $E = F$ et $a = Id_E$, alors $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(Id_E) = I_n$.
2. Lorsque $E = \mathbf{K}^2$ et $F = \mathbf{K}^3$ sont munis de leurs bases canoniques. L'application linéaire $a \in LL(\mathbf{K}^2; \mathbf{K}^3)$ définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{K}^2, \quad a(x_1, x_2) = (7x_1 - 12x_2; -x_1 + 2x_2; 8x_2).$$

a pour matrice représentative dans les bases canoniques, la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

En pratique : pour déterminer la matrice représentative d'une application linéaire relativement à des bases $\mathcal{E}$, et $\mathcal{F}$,

- décomposez $a(\vec{e}_1)$, $a(\vec{e}_2)$, $\ldots$, $a(\vec{e}_p)$ dans la base $\mathcal{F}$,
- rangez leurs coordonnées en colonnes.

Exercice : Soit $\Delta : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}[X]$ l'application linéaire qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

1. Montrez que Δ induit une application linéaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
2. Déterminez sa matrice représentative dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Solution $\triangledown$

1. *Nous avons déjà prouvé que Δ est linéaire au* **Chapitre 24**. *De plus, d'après les propriétés algébriques du degré des polynômes, si $P \in \mathbf{R}_n[X]$ est de degré inférieur ou égal à n, son polynôme dérivée $\Delta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par conséquent, Δ induit une application linéaire –encore notée Δ– de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.*
2. *Les bases canoniques de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{R}_n[X]$ sont $(1, X, \dots, X^{n-1})$ et $(1, X, \dots, X^n)$.*
 Afin de déterminer la matrice représentative de Δ dans les bases canoniques, écrivons que :

$$\begin{array}{lcl} \Delta(1) & = & 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + \cdots + 0\cdot X^{n-1} \\ \Delta(X) & = & 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + \cdots + 0\cdot X^{n-1} \\ \Delta(X^2) & = & 0\cdot 1 + 2\cdot X + 0\cdot X^2 + \cdots + 0\cdot X^{n-1} \\ & \vdots & \\ \Delta(X^n) & = & 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + \cdots + n\cdot X^{n-1} \end{array}$$

 Rangeons les coordonnées des vecteurs images $\Delta(1), \Delta(X), \dots \Delta(X^n)$ en colonnes, nous obtenons la matrice D représentative de Δ dans les bases canoniques :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

▲

Exercice : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère l'endomorphisme a de E défini par la donnée de sa matrice représentative $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez, **sans calculs**, une base de l'image et du noyau de a.

II.2 Isomorphismes de $\mathcal{L}(E_p, F_n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Etant données $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n, nous avons associé à toute application linéaire $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$, une matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ telle que

$$\forall \vec{x} \in E_p, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x})) = A \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$$

Bonne nouvelle ! Toute application linéaire est obtenue par ce procédé. Plus précisément

Théorème 26.3.— Soient E_p et F_n des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies p et n. **Fixons** $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{L}(E_p, F_n) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ & a & \mapsto & \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Commentaires : toute application linéaire $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ est l'application linéaire associée à une matrice :
En clair, si $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{F}$) est une base de E_p (*resp.* F_n) alors a est toujours de la forme :

$$a(x_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + x_p \cdot \vec{e}_p) = \big(a_{1,1}\ x_1 + \cdots + a_{1,p}\ x_p\big) \cdot \vec{f}_1 + \cdots + \big(a_{n,1}\ x_1 + \cdots + a_{n,p}\ x_p\big) \cdot \vec{f}_n.$$

Remarque : $\mathcal{L}(E_p, F_n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont isomorphes mais il n'y a pas en général d'isomorphisme *canonique* entre ces deux espaces vectoriels : tout choix de bases pour E_p et F_n donne un isomorphisme différent.

Démonstration ▽

- Ψ est linéaire :
 Soient a et b sont deux applications linéaires de E_p dans F_n, α, β des scalaires. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, nous avons :

$$(\alpha \cdot a + \beta \cdot b)(\vec{e}_j) = \alpha \cdot a(\vec{e}_j) + \beta \cdot b(\vec{e}_j)$$

Par suite,

$$\mathbf{M}_{\mathcal{F}}((\alpha\cdot a+\beta\cdot b)(\vec{e}_j))=\alpha\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_j))+\beta\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(b(\vec{e}_j))$$

Ceci étant vrai pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, j'en déduis –en examinant les colonnes de ces matrices– que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\alpha\cdot a+\beta\cdot b)=\alpha\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)+\beta\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(b)$$

- Ψ est injective :
  Soit $a\in\mathsf{Ker}\,\Psi$. Par définition, cela signifie que la matrice représentative de a est la matrice nulle. Ainsi

$$a(\vec{e}_1)=a(\vec{e}_2)=\cdots=a(\vec{e}_p)=\vec{0}_F$$

  Par suite, pour tout $\vec{x}=x_1\cdot\vec{e}_1+\cdots x_p\cdot\vec{e}_p$, il en résulte par linéarité de a que

$$a(\vec{x})=\sum_{i=1}^{p}x_i\cdot a(\vec{e}_i)=\vec{0}_F$$

  a est donc l'application linéaire nulle. Ainsi $\mathsf{Ker}\,\Psi=\{0_{L(E,F)}\}$, ce qui prouve que Ψ est injective.
- Ψ est surjective :
  Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à coefficients dans $\mathbf{K}$. Définissons $a\in\mathcal{L}(E_p,F_n)$ par :

$$\forall\vec{x}\in E_p,\quad \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x}))=A\times\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$$

  Comme l'application Φ qui à un vecteur associe sa matrice représentative est un isomorphisme, l'application a est bien définie. De plus, a est linéaire puisque pour tous $(\vec{x},\vec{y})\in E_p^2$, $\lambda\in\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y})) &= A\times\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y})\\ &= A\times(\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})+\lambda\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{y}))\\ &= A\times\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})+\lambda\cdot A\times\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{y})\\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x}))+\lambda\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{y}))\\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x})+\lambda\cdot a(\vec{y}))\end{aligned}$$

  Comme l'application Φ, qui à un vecteur associe sa matrice représentative dans une base (**Proposition** 26.1) est injective, il s'ensuit que $a(\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y})=a(\vec{x})+\lambda\cdot a(\vec{y})$.

Montrons que A est la matrice représentative de a relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Notons pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, A_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de A et $U_j=\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{e}_j)$ la matrice représentative de $\vec{e}_j$ dans la base $\mathcal{E}$. En clair

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{1,1}\\a_{2,1}\\a_{3,1}\\\vdots\\a_{n,1}\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}a_{1,2}\\a_{2,2}\\a_{3,2}\\\vdots\\a_{n,2}\end{pmatrix},\ldots,\ A_p=\begin{pmatrix}a_{1,p}\\a_{2,p}\\a_{3,p}\\\vdots\\a_{n,p}\end{pmatrix},\ \text{ et } U_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ U_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\ U_p=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

D'après les règles du calcul matriciel, nous avons d'une part

$$A\times U_j=A_j.$$

D'autre part, par construction de a

$$A\times U_j=A\times\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{e}_j)=\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{e}_j))$$

Ainsi, les colonnes de A sont les matrices représentatives des vecteurs $a(\vec{e}_1),a(\vec{e}_2),\ldots a(\vec{e}_p)$. Par définition, cela signifie que $A=\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$, ou encore $A=\Psi(a)$.
Comme toute matrice est la matrice représentative d'une application linéaire relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, ceci prouve que Ψ est surjective. ▲

L'isomorphisme Ψ, bien qu'étant assez abstrait a des conséquences importantes et pratiques :

Corollaire 26.4.— Soient E_p, F_n des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n. Alors

$$\mathcal{L}(E_p,F_n)\text{ est isomorphe à }\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

En particulier, $\mathcal{L}(E_p,F_n)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n\times p$.

Démonstration $\triangledown$
En effet, rappelons que $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p$. Comme deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels isomorphes ont même dimension, le résultat en découle. $\blacktriangle$

Dans le cas particulier où $E_p = \mathbf{K}^p$, $F_n = \mathbf{K}^n$, et les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ choisies sont les bases canoniques, le théorème précédent donne :

Corollaire 26.5.— Toute application linéaire a de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $(a_{i,j})$. Elle est donc définie par :

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p, \quad a(x_1, \dots, x_p) = \Big(a_{1,1}\ x_1 + \dots + a_{1,p}\ x_p, \dots, a_{n,1}\ x_1 + \dots + a_{n,p}\ x_p\Big).$$

Remarque : En particulier–particulier, toute forme linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}$ s'écrit :

$$\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p, \quad a(x_1, \dots, x_p) = a_{1,1}\ x_1 + \dots + a_{1,p}\ x_p.$$

II.3 Calcul de l'image d'un vecteur avec la matrice représentative

Dans l'**Exemple introductif**, nous avons défini une application linéaire $a : E_4 \to F_3$ qui vérifie pour tout $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 + x_4 \cdot \vec{e}_4$:

$$a(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \cdot \vec{f}_1 + (-2x_1 + x_2 + 2x_3) \cdot \vec{f}_2 + (x_1 - x_2 - x_4) \cdot \vec{f}_3,$$

et nous avons construit sa matrice représentative $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Inversement, à partir de la matrice A, il est aisé de calculer l'image par a d'un vecteur $\vec{x}$ de E : ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ sont obtenues en effectuant le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

Plus généralement,

Proposition 26.6.— Soient E_p et F_n deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ et $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire de E_p vers F_n.
Pour tout vecteur $\vec{x} \in E_p$, les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$ et celles de $a(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{F}$ sont liées par la relation matricielle :

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x})) = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})}$$

En pratique : si $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ et $X = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$, les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ de $a(\vec{x})$ sont les coefficients de la matrice-colonne :

$$Y = A \times X.$$

Démonstration $\triangledown$

Notons $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ la matrice représentative de a dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et considérons un vecteur quelconque de E, $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_p \cdot \vec{e}_p$.

• D'une part, par définition du produit matriciel,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\ x_j$.

• D'autre part, par définition de A, ses colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ des $a(\vec{e}_j)$. Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad a(\vec{e}_j) = a_{1,j}\vec{f}_1 + a_{2,j} \cdot \vec{f}_2 + \cdots + a_{n,j} \cdot \vec{f}_n.$$

Par linéarité de a, il en résulte que

$$a(\vec{x}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{p} a(x_j \cdot \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \cdot a(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot \vec{f}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\ x_j\right)}_{y_i} \cdot \vec{f}_i$$

• Par conséquent, nous avons démontré : $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x}))$. ▲

Exercice : Soit $a : \mathbf{R}_4[X] \to \mathbf{R}_4[X]$ l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbf{R}_4[X]$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez $a(1),\ a(X),\ a(X^2),\ a(X^3)$ et $a(X^4)$.

2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. Exprimez $a(P)$ en fonction de P.

Solution ▽

1. *Par définition, les coordonnées de $a(1)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_4[X]$ sont $(1, 0, 0, 0, 0)$, de sorte que $a(1) = 1$. De même*

$$\begin{array}{lcl} a(1) & = & 1 \\ a(X) & = & 1 + X \\ a(X^2) & = & 1 + 2X + X^2 \\ a(X^3) & = & 1 + 3X + 3X^2 + X^3 \\ a(X^4) & = & 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4 \end{array}$$

2. *Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. Par linéarité de a, il vient*

$$\begin{array}{lcl} a(P) & = & a_0\, a(1) + a_1\ a(X) + a_2\ a(X^2) + a_3\ a(X^3) + a_4\ a(X^4) \\ & = & a_0 + a_1\ (1+X) + a_2(1+X)^2 + a_3\ (1+X)^3 + a_4\ (1+X)^4 \\ & = & P(X+1) \end{array}$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_4[X]$, $a(P)(X) = P(X+1)$. ▲

II.4 Composition des applications linéaires et produit matriciel

Du point de vue de la structure d'espaces vectoriels, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{L}(E_p, F_n)$ sont identiques. Dès lors que deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont fixées, une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par la matrice des coordonnées des images des vecteurs de base.
Ces deux espaces vectoriels sont en outre munis d'un produit : le produit des matrices et la composition des applications. Le théorème suivant prouve que l'isomorphisme Ψ préserve ces produits, dans le sens que la *matrice représentative d'une composée est le produit des matrices représentatives.*
Plus précisément :

Théorème 26.7.— Soient E_p, F_n ,G_m trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$, $b \in \mathcal{L}(F_n, G_m)$ deux applications linéaires. Etant données $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathscr{G}$ des bases de E_p, F_n et G_m respectivement, les matrices représentatives de a, b et $b \circ a$ vérifient :

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)}$$

Démonstration $\triangledown$
Soit $\vec{x} \in E_p$, d'après la **Proposition** 26.6, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) &= \mathbf{M}_{\mathcal{G}}((b \circ a)(\vec{x})) = \mathbf{M}_{\mathcal{G}}(b\big(a(\vec{x})\big)) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{F}}(a(\vec{x})) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E_p, $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{x})$.
En particulier, nous pouvons appliquer ceci aux vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_p$ de la base $\mathcal{E}$. Notons

$$C_1 = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ C_p = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\vec{e}_p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \mathbf{M}(b \circ a) \times C_j = \mathbf{M}(b) \times \mathbf{M}(a) \times C_j$$

Autrement dit, les matrices $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(b \circ a)$ et $\mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ ont les mêmes colonnes. Elles sont donc égales. ▲

On en déduit le **lien fondamental** entre isomorphismes et matrices inversibles :

Théorème 26.8.— Soient E_n et F_n deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
On considère une application linéaire $a : E_n \to F_n$ de matrice représentative $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$. Alors

a est un isomorphisme *si et seulement si* A est inversible.

En ce cas

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(a^{-1}) = A^{-1}}$$

Démonstration $\triangledown$
La condition est nécessaire Supposons que $a \in GL(E, F)$ est un isomorphisme. En ce cas, il existe $b \in L_{\mathcal{L}}, E)$ tel que $b \circ a = Id_E$. En particulier, les matrices représentatives de $b \circ a$ et Id_E dans la base $\mathcal{E}$ coïncident. C'est-à-dire

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(b \circ a) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(Id_E)$$

Comme $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(Id_E) = I_n$ et $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(b \circ a) = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$, j'en déduis que $\mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = I_n$.
D'après le **Théorème** 22.18 cette condition garantit que la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est inversible et que $\mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(a^{-1}) = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)^{-1}$.

La condition est suffisante Réciproquement, supposons que la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ est inversible. Notons $B = A^{-1}$ et appelons $b \in \mathcal{L}(F, E)$ l'application linéaire représentée par B dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$. Alors

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(Id_E) = I_n = B \times A = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(b) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(b \circ a)$$

Ainsi, l'identité et l'application $b \circ a$ ont même matrice représentative dans la base $\mathcal{E}$. Comme Ψ est injective, ceci n'est possible que si $b \circ a = Id_E$. De même, on déduit de l'égalité matricielle $I_n = A \times B$ que $a \circ b = Id_F$, ce qui permet finalement de conclure que a est un isomorphisme. ▲

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ l'application linéaire qui à tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 associe

$$f(P) = P - P'.$$

1. Déterminez la matrice représentative A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$.

2. Montrez que A est inversible et calculez A^{-1}.

3. En déduire que f est un isomorphisme et explicitez son isomorphisme réciproque.

Solution ▽

1. *Je calcule les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Par définition de f, j'obtiens $f(1) = 1,\ f(X) = X - 1,\ f(X^2) = X^2 - 2X$. En rangeant les coordonnées de ces polynômes dans la base canonique en colonnes , j'obtiens immédiatement que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *La matrice A est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible et l'algorithme de* Gauss-Jordan *donne*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *D'après le* **Théorème** *26.8, il en résulte directement que f est un isomorphisme et que A^{-1} est la matrice représentative de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Pour expliciter $f^{-1}(P)$, j'effectue le produit matriciel :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2a_2 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$f^{-1}(P) = (a_0 + a_1 + 2a_2) + (a_1 + 2a_2)X + a_2X^2.$$

▲

III Changements de bases

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout choix d'une base $\mathcal{B}$ de E, nous savons que f est représenté par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

A partir de la matrice représentative de f, nous pouvons effectuer tous les calculs intéressants pour f :

– calculer l'image par f d'un vecteur $\vec{x}$,
– calculer le rang de f,
– déterminer une base de $\mathsf{Im}\, f$, de $\mathsf{Ker}\, f$,
– déterminer –le cas échéant– l'isomorphisme réciproque de f,
– *etc…*

Bien sûr, les matrices représentatives de f dans des bases différentes sont elles aussi différentes *a priori*. Le but des changements de bases est précisément de déterminer une base *privilégiée* pour représenter f, *i.e.* une base pour laquelle la matrice représentative de f soit la plus simple possible. Ceci fera l'objet d'une étude approfondie en deuxième année, dans le chapitre **Réduction des endomorphismes**.

III.1 Matrice de passage

a) Exemple introductif

Considérons une première base $\mathcal{B} = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right)$ de $E = \mathbf{R}^3$. On définit la famille $\mathcal{B}' = \left(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\right)$ par :

$$\begin{cases} \vec{b}'_1 = \vec{b}_1 & & +\vec{b}_3 \\ \vec{b}'_2 = & 2\vec{b}_2 & +\vec{b}_3 \\ \vec{b}'_3 = \vec{b}_1 & -\vec{b}_2 & \end{cases}$$

La famille $\mathcal{B}'$ est une base de E. En effet, la matrice P représentative de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit

$$P = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul élémentaire montre que P est inversible. D'après le **Théorème** 26.2, nous en déduisons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Définition : *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice représentative de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Commentaires : en clair, les colonnes de la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ sont formées des coordonnées des vecteurs de la *nouvelle* base dans l'*ancienne* base.

Les notations sont lourdes, mais *vous ne pouvez pas vous tromper* : les vecteurs de la nouvelle base sont nécessairement définis comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne : vous n'avez qu'à ranger ces coordonnées en colonnes.

Lemme 26.9.— Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$$

Démonstration ▽
Notons $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \vec{b}'_1 &= p_{1,1}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,1}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,1}\cdot\vec{b}_n \\ \vec{b}'_2 &= p_{1,2}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,2}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,2}\cdot\vec{b}_n \\ &\vdots \\ \vec{b}'_n &= p_{1,n}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,n}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,n}\cdot\vec{b}_n \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} Id_E(\vec{b}'_1) &= p_{1,1}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,1}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,1}\cdot\vec{b}_n \\ Id_E(\vec{b}'_2) &= p_{1,2}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,2}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,2}\cdot\vec{b}_n \\ &\vdots \\ Id_E(\vec{b}'_n) &= p_{1,n}\cdot\vec{b}_1 + p_{2,n}\cdot\vec{b}_2 + \cdots + p_{n,n}\cdot\vec{b}_n \end{aligned}$$

Clairement, les matrices repésentatives de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ et celle de l'application identité de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$ coïncident. ▲

Comme l'identité est un automorphisme de E, la matrice de passage est **inversible**. Plus précisément, nous déduisons du **Théorème** 26.8, la :

Proposition 26.10.— Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et

$$\boxed{\left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}}$$

Remarque : Inversement étant donnée une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel de dimension finie, toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{K})$ est une matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers une autre base $\mathscr{B}'$.

III.2 Formules de changement de base

Exemple introductif : Reprenons les bases $\mathcal{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{R}^3$ définies au paragraphe précédent. Soit $\vec{u} = x_1\cdot\vec{b}_1 + x_2\cdot\vec{b}_2 + x_3\cdot\vec{b}_3$ un vecteur quelconque de E. Comme $\mathcal{B}'$ est une base de E, ce vecteur $\vec{u}$ se décompose aussi, de façon unique, comme combinaison linéaire de $\vec{b}'_1$, $\vec{b}'_2$ et $\vec{b}'_3$:

$$\vec{u} = x'_1\cdot\vec{b}'_1 + x'_2\cdot\vec{b}'_2 + x'_3\cdot\vec{b}'_3.$$

Pour déterminer les "*nouvelles coordonnées*" (x'_1, x'_2, x'_3) de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}'$, remplaçons les vecteurs $\vec{b}'_1$, $\vec{b}'_2$ et $\vec{b}'_3$ par leurs expressions en fonction de $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$. Il vient

$$\vec{u} = (x'_1 + x'_3)\cdot\vec{b}_1 + (2x'_2 - x'_3)\cdot\vec{b}_2 + (x'_1 + x'_2)\cdot\vec{b}_3.$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur dans la base, nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{lllr} x'_1 & & +x'_3 & = x_1 \\ 2x'_1 & +x'_2 & & = x_2 \\ x'_1 & +x'_2 & & = x_3 \end{array}\right. ,$$

qui se traduit matriciellement par

$$P \times \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matrice P étant inversible, ce système admet une unique solution

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les nouvelles coordonnées du vecteur $\vec{x}$ se déduisent des anciennes par le produit matriciel ci-dessus.

Plus généralement, étant données deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathscr{B}'$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ permet de calculer directement les matrices représentatives dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur ou d'un endomorphisme à partir de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Il s'agit des :

Théorème 26.11.— Formules de changement de base
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Alors

- Soit $\vec{x} \in E$ un vecteur de E. Ses matrices représentatives $X = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ et $X' = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement sont liées par la relation :

$$\boxed{X' = P^{-1} \times X}$$

- Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme de E. Ses matrices représentatives $A = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement sont liées par la relation :

$$\boxed{A' = P^{-1} \times A \times P}$$

Démonstration $\triangledown$
Ces deux formules se déduisent aisément de la **Proposition** 26.6 et du **Théorème** 26.7 :

- $$\begin{aligned} X' &= \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(\vec{x}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(Id_E(\vec{x})) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = P^{-1} \times X. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} A' &= \mathbf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(Id_E \circ f \circ Id_E) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) = P^{-1} \times A \times P. \end{aligned}$$

▲

Exercice : Reprenez les bases $\mathcal{B} = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3\right)$ de l'**Exemple introductif**

1. Déterminez les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $2\cdot\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\cdot\vec{b}_3$.

2. Déterminez la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme de E représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Matrices semblables

Dans ce paragraphe *Hors-programme*, nous étudions les liens qui existent entre des matrices qui représentent le même endomorphisme, mais dans des bases différentes :

Définition : *Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que*

$$\boxed{A' = P^{-1} \times A \times P}$$

Remarque : La relation A est semblable à B est une relation d'équivalence :
réflexivité : toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est semblable à elle-même,
symétrie : **si** A est semblable à B, **alors** B est semblable à A,
transitivité : **si** A est semblable à B, B est semblable à C, **alors** A est semblable à C.

D'après les formules de changement de bases, deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables. La proposition suivante prouve que la réciproque est vraie :

Proposition 26.12.— Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices carrées à coefficients dans $\mathbf{K}$.

A et A' sont semblables
si et seulement si
elles représentent le même endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans des bases différentes.

Démonstration $\triangledown$
Soient A et A' deux matrices semblables. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

Montrons que A et A' représentent le même endomorphisme, mais dans des bases différentes :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $a \in L(\mathbf{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire :

$$A = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(a).$$

A présent, construisons une nouvelle base de $\mathbf{K}^n$ en procédant comme suit : notons $p_{i,j}$ les coefficients de P, et posons

$$\begin{array}{rcl} \vec{b}'_1 & = & p_{1,1} \cdot \vec{b}_1 + p_{2,1} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + p_{n,1} \cdot \vec{b}_n \\ \vec{b}'_2 & = & p_{1,2} \cdot \vec{b}_1 + p_{2,2} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + p_{n,2} \cdot \vec{b}_n \\ & \vdots & \\ \vec{b}'_n & = & p_{1,n} \cdot \vec{b}_1 + p_{2,n} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + p_{n,n} \cdot \vec{b}_n \end{array}$$

La matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathscr{B}' = \left(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n\right)$ ainsi construite est précisément :

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} = P$$

Comme P est inversible, le rang de la famille $\mathscr{B}'$ est égal à n : $\mathscr{B}'$ est donc une base de $\mathbf{K}^n$. De plus, par construction $P = P_{\mathcal{B} \to \mathscr{B}'}$ est la matrice de pasage de $\mathcal{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Par conséquent, d'après les formules de changement de base pour l'endomorphisme $a \in L(\mathbf{K}^n)$,

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

est la matrice représentative de a dans la base $\mathscr{B}'$. ▲

Exercice : Soient A et B des matrices semblables. Montrez que pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k et B^k sont semblables.

Solution $\triangledown$
Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $\forall k \in \mathbf{N}$, $B^k = P^{-1} \times A^k \times P$.
Initialisation : *lorsque $k = 0$, $A^0 = B^0 = I_n$.*

Hérédité : *soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $B^k = P^{-1} \times A^k \times P$. Calculons B^{k+1} :*

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B \times B^k = (P^{-1} \times A \times P) \times (P^{-1} \times A^k \times P) \\ &= (P^{-1} \times A) \times (P \times P^{-1}) \times (A^k \times P) \\ &= P^{-1} \times (A \times A^k) \times P \\ &= P^{-1} \times A^{k+1} \times P. \end{aligned}$$

Concluzione : *la propriété est vraie pour $k = 0$ et elle est héréditaire : par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $k \in \mathbf{N}$.* ▲

IV Rang d'une matrice

Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, nous pouvons lui associer *canoniquement* :
- une famille de vecteurs ;
- une application linéaire ;
- des systèmes d'équations linéaires.

Par exemple, à partir de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons associé

- la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$\vec{a}_1 = (1,1,3),\ \vec{a}_2 = (2,0,1),\ \vec{a}_3 = (0,2,1) \text{ et } \vec{a}_4 = (1,1,0);$$

- l'application linéaire $a : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie par :

$$\forall (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4,\ a(x_1,x_2,x_3,x_4) = \big(x_1 + 2x_2 + x_4,\ x_1 + 2x_3 + x_4,\ 3x_1 + x_2 + x_3\big);$$

- le système d'équations linéaires homogène :

$$(S_o) \quad \left\{ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Pour chacun de ces trois objets, nous avons déjà défini une notion de rang. Fort heureusement, les trois rangs obtenus coïncident !

IV.1 Définition

Proposition 26.13.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à p colonnes notées $A_1, \ldots, A_p$. Notons
- $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$ les vecteurs canoniquement associés aux matrices-colonnes $A_1, \ldots, A_p$.
- $a \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

Alors

$$\boxed{\operatorname{Rg} a = \operatorname{Rg}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)}$$

Démonstration ▽
Par définition, le rang de a est la dimension de son image $\operatorname{Im} a$. L'application induite $a_| : \mathbf{K}^p \to \operatorname{Im} a$ est linéaire surjective. D'après la **Proposition** 24.15, il s'ensuit que la famille $\big(a(\vec{e}_1), a(\vec{e}_2), \ldots, a(\vec{e}_p)\big)$ engendre $\operatorname{Im} a$. Or, par construction de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, $a(\vec{e}_1) = \vec{a}_1$, $a(\vec{e}_2) = \vec{a}_2, \ldots$ et $a(\vec{e}_p) = \vec{a}_p$. Par conséquent :

$$\operatorname{Im} a = \operatorname{Vect}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p\}$$

Ainsi $\operatorname{Rg} a = \operatorname{Rg}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p)$. ▲

Puisque le rang des vecteurs-colonnes *canoniquement* associés à la matrice A et le rang de l'application linéaire *canoniquement* associée à A coïncident, il est naturel d'adopter la définition suivante :

Définition : Rang d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice à p colonnes notées $A_1, \dots, A_p$. Notons comme précédemment $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p)$ les vecteurs-colonnes canoniquement associés aux colonnes de A et $a \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. On pose :

$$\boxed{\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} a = \operatorname{Rg}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p)}$$

Exemple typique : Soient $(n, p) \in \mathbf{N}^2$ et r un entier naturel inférieur ou égal à n et à p. Notons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r, \vec{0}, \dots, \vec{0})$ de p vecteurs de $\mathbf{K}^n$. La matrice représentative de cette famille est la matrice *échelonnée* :

$$J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Clairement, la sous-famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r)$ est libre et génératrice du sous-espace vectoriel F engendré par $\mathcal{F}$. Ainsi F est de dimension r et par conséquent la matrice $J_{n,p,r}$ est de rang r.

Exercice : Déterminez le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Solution $\triangledown$
Soient $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associés aux colonnes de A. Par définition

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \dim_{\mathbf{R}} \operatorname{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Je remarque que $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, par conséquent, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Comme de plus les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $\operatorname{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Ainsi

$$\operatorname{Rg} A = \dim_{\mathbf{R}} \operatorname{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = 2$$

▲

IV.2 Propriétés du rang des matrices

Le rang d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ étant toujours inférieur ou égal à p et à n, il en va de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

Proposition 26.14.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors

$$\operatorname{Rg} A \leq \min\{n, p\}$$

La première **propriété fondamentale** du rang des matrices est d'être invariant par la multiplication (à gauche ou à droite) par une matrice carrée inversible.

Définition : *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont* ***équivalentes*** *s'il existe un couple $(P, Q) \in GL_n(\mathbf{K}) \times GL_p(\mathbf{K})$ tel que*

$$B = P \times A \times Q$$

Proposition 26.15.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Pour toutes matrices carrées inversibles $P \in GL_n(\mathbf{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbf{K})$,

$$\boxed{\operatorname{Rg}(P \times A \times Q) = \operatorname{Rg} A}$$

Commentaires : en clair, **si** A et B sont équivalentes, **alors** $\mathsf{Rg}\,A = \mathsf{Rg}\,B$.

Démonstration $\triangledown$
Notons $a \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$, $p \in L(\mathbf{K}^n)$, et $q \in L(\mathbf{K}^p)$, les applications linéaires canoniquement associées à A, P et Q respectivement. Comme P et Q sont inversibles, il découle du **Corollaire** 26.8 que les endomorphismes p et q sont en fait des automorphismes de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^p$ respectivement. Appliquons la **Proposition** 25.25 :

$$\mathsf{Rg}\,(p \circ a \circ q) = \mathsf{Rg}\,a.$$

D'après la **Proposition** 26.7, $P \times A \times Q$ est la matrice repésentative de $p \circ a \circ q$ dans les bases canoniques, ainsi :
par définition du rang $\quad \mathsf{Rg}\,\big(P \times A \times Q\big) = \mathsf{Rg}\,(p \circ a \circ q) = \mathsf{Rg}\,a = \mathsf{Rg}\,A.$ ▲

Comme nous l'avons vu (page précédente), la matrice $J_{n,p,r}$ est un **exemple typique** de matrice de rang r. En fait, toute matrice $n \times p$ de rang r est équivalente à $J_{n,p,r}$. Plus précisément :

Proposition 26.16.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On suppose que $\mathsf{Rg}\,A = r$. Alors il existe un couple $(P, Q) \in GL_n(\mathbf{K}) \times GL_p(\mathbf{K})$ tel que

$$A = P \times J_{n,p,r} \times Q$$

Démonstration $\triangledown$
Notons a l'application linéaire canoniquement associée à A de sorte que $A = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(a)$, où $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ désignent les bases canoniques de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$.

• Construisons une base $\mathcal{E}$ de $\mathbf{K}^p$ et une base $\mathcal{F}$ de $\mathbf{K}^n$ pour lesquelles la matrice représentative de a soit simplement la matrice $J_{n,p,r}$.

Posons $K = \mathsf{Ker}\,a$ et considérons un supplémentaire [1] F de K, de sorte que

$$\mathbf{K}^p = F \oplus K$$

D'après la formule du rang, F est de dimension $p - \dim_{\mathbf{K}} K = p - \dim_{\mathbf{K}} \mathsf{Ker}\,a = r$. Considérons une base $\big(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\big)$ de F et une base $\big(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_p\big)$ une base de K, de sorte que $\mathcal{E} = \big(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\big)$ forme une base de $\mathbf{K}^p$.
Remarquons que l'application $a_| : F \to \mathbf{K}^n$ est injective[2]. D'après la **Proposition** 24.17, il s'ensuit que la famille $\mathscr{L} = \big(a(\vec{e}_1), \ldots, a(\vec{e}_r)\big)$ est libre dans $\mathbf{K}^n$. Notons $\vec{f}_1 = a(\vec{e}_1), \ldots, \vec{f}_r = a(\vec{e}_r)$ et utilisons le **Théorème de la base incomplète** (**Corollaire** 25.2) pour compléter cette famille en une base $\mathcal{F} = \big(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_n\big)$ de $\mathbf{K}^n$.
Remarquons que par construction

$$\begin{array}{rcllll}
a(\vec{e}_1) & = & \vec{f}_1 & & & \\
a(\vec{e}_1) & = & & \vec{f}_2 & & \\
& \vdots & & & \ddots & \\
a(\vec{e}_r) & = & & & & \vec{f}_r \\
a(\vec{e}_{r+1}) & = & \vec{0} & & & \\
& \vdots & & & & \\
a(\vec{e}_p) & = & \vec{0} & & &
\end{array}$$

Autrement dit, la matrice représentative de a dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ s'écrit par *blocs* :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = J_{n,p,r}.$$

• Finalement, posons $P = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{B}_n}(Id_{\mathbf{K}^n})$ et $Q = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{E}}(Id_{\mathbf{K}^p})$. Comme $Id_{\mathbf{K}^p}$ et $Id_{\mathbf{K}^n}$ sont des automorphismes de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$, il découle du **Théorème** 26.8 que les matrices P et Q sont inversibles. De plus,

$$\begin{array}{rcl}
J_{n,p,r} & = & \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(Id_n \circ a \circ Id_p) \\
& = & \mathbf{M}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{F}}(Id) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}_p}(Id) \\
& = & P^{-1} \times A \times Q^{-1}.
\end{array}$$

D'où l'on tire aisément la relation souhaitée. ▲

[1] dont l'existence est assurée par le **Théorème** 25.15
[2] puisque son noyau est réduit à $\vec{0}$!

Nous avons vu que deux matrices équivalentes ont même rang. Réciproquement, si A et B ont même rang, d'après la proposition précédente, elles sont toutes deux équivalentes à $J_{n,p,r}$. Comme la relation d'équivalence des matrices est transitive, il en résulte que A et B sont équivalentes.
Nous avons donc démontré :

Théorème 26.17.— Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors

$$\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, B \textit{ si et seulement si } A \text{ et } B \text{ sont équivalentes.}$$

Comme corollaire, nous en déduisons qu'une matrice et sa transposée ont même rang :

Proposition 26.18.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors

$$\boxed{\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, {}^tA}$$

Démonstration ▽
Soit $r = \mathrm{Rg}\, A$, alors d'après le **Théorème** 26.17, il existe un couple $(P, Q) \in GL_p(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K})$ tel que

$$A = P \times J_{n,p,r} \times Q$$

Transposons cette relation pour obtenir

$${}^tA = {}^tQ \times {}^tJ_{n,p,r} \times {}^tP = {}^tQ \times J_{p,n,r} \times {}^tP$$

Comme ${}^tQ$ et ${}^tP$ sont inversibles, ${}^tA$ est équivalente à $J_{p,n,r}$. Appliquons le **Théorème** 26.17, il en résulte que $\mathrm{Rg}\, {}^tA = r = \mathrm{Rg}\, A$. ▲

IV.3 Calcul du rang d'une matrice par la méthode de Gauss

Comme les opérations élémentaires sur les lignes (*resp.* les colonnes) d'une matrice (cf **Chapitre 22**) résultent de la multiplication à gauche (*resp.* à droite) par des matrices inversibles, la **Proposition** 26.15 montre que le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. On en déduit

Proposition 26.19.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On ne change pas le rang d'une matrice lorsqu'on :
- échange deux lignes (*resp.* deux colonnes) de A ;
- remplace une ligne (*resp.* colonne) de A par un multiple non nul de cette ligne (*resp.* colonne) ;
- ajoute à une ligne (*resp.* colonne) un multilple d'une autre ligne (*resp.* colonne).

Grâce à l'utilisation répétée de cette proposition sur les lignes et/ou sur les colonnes, la méthode du **pivot de Gauss** permet d'échelonner une matrice de proche en proche en conservant le rang à chaque étape. Le rang de A est alors égal au rang de sa réduite de Gauss :

Théorème 26.20.— Rang d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée, *i.e.* il existe r, $1 \leq r \leq p$ et $1 \leq r \leq n$ tel que A se présente sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,r} & \cdots & a_{2,p} \\ & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{a_{r,r}} & \cdots & a_{r,p} \\ \vdots & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & \boxed{a_{r,r}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,r} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients diagonaux $\boxed{a_{i,i}}$ pour $1 \leq i \leq r$ sont **non nuls**.

Alors
$$\mathsf{Rg}\, A = r$$

Démonstration $\triangledown$
Comme le rang des matrices est invariant par transposition, il suffit de calculer le rang de la première matrice.
Notons

– $\mathcal{A} = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p\right)$ la famille de vecteurs canoniquement associée à la matrice A. Par définition,
$$\mathsf{Rg}\, A = \dim_{\mathbf{K}} \mathsf{Vect}\, \mathcal{A}.$$
– $\mathcal{B} = \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r\right)$ la sous-famille correspondant aux r premiers vecteurs colonnes de A ;
– $F_r = \mathsf{Vect}\,\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r\}$, le sous-espace vectoriel engendré par les r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Nous allons prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathsf{Vect}\, \mathcal{A}$.

- Il apparaît clairement que $\mathsf{Vect}\, \mathcal{A} \subset F_r$.
- Montrons que $\mathcal{B} = \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r\right)$ est une base de F_r.
  Comme $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs de F_r de cardinal $r = \dim_{\mathbf{K}} F_r$, il suffit de prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
  Soit donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbf{K}^r$ tel que
  $$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_r \cdot \vec{a}_r = \vec{0} \tag{26.4}$$
  Cette équation vectorielle est équivalente à l'équation matricielle
  $$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,r} \\ 0 & \boxed{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_{r,r}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La matrice des coefficients étant triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible. Par conséquent, l'équation (26.4) admet une unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) = (0, 0, \ldots, 0)$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est libre maximale dans F_r : c'est donc une base de F_r.
- Montrons que $\mathcal{B} = \left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_r\right)$ est une base de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$.
  Comme nous savons déjà que $\mathcal{B}$ est libre, il suffit de prouver qu'elle est génératrice de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$.
  Comme $\mathcal{B}$ est une sous-famille de $\mathcal{A}$, il est clair que $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{B}) \subset \mathsf{Vect}\,(\mathscr{A})$. Réciproquement, comme $\mathcal{B}$ est une base de F_r, l'inclusion $\mathsf{Vect}\, \mathcal{A} \subset F_r$ montre que $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) \subset \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$.
  Par double-inclusion, nous avons prouvé que $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{B})$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathsf{Vect}\,(\mathcal{A})$. Par conséquent,
$$\mathsf{Rg}\, A = \dim_{\mathbf{K}} \mathsf{Vect}\,(\mathcal{A}) = \mathsf{Card}\ \mathcal{B} = r$$

▲

Comme les coefficients diagonaux non nuls $a_{k,k}$ pour $1 \leq k \leq r$, sont les pivots successifs dans l'algorithme de Gauss, il en résulte :

Corollaire 26.21.— Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est égal au nombre de pivots non nuls apparus lors de la réduction de A.

a) Mise en oeuvre

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\mathsf{Rg}\, A = \mathsf{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathsf{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathsf{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

Exercice : Calculez le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

IV.4 Conséquences

a) Calcul du rang d'une famille de vecteurs

Théorème 26.22.— Soit E_n un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
On considère une famille $\mathcal{A} = (\vec{a}_1; \ldots; \vec{a}_p)$ de p vecteurs de E_n. Alors

$$\mathsf{Rg}\,(\mathcal{A}) = \mathsf{Rg}\,\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}).$$

En pratique : pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, vous calculez le rang de sa matrice représentative dans une base.

Démonstration ▽
Supposons que

$$\begin{array}{rcl} \vec{a}_1 & = & a_{1,1} \cdot \vec{e}_1 + a_{2,1} \cdot \vec{e}_2 + \cdots + a_{n,1} \cdot \vec{e}_n \\ \vec{a}_2 & = & a_{1,2} \cdot \vec{e}_1 + a_{2,2} \cdot \vec{e}_2 + \cdots + a_{n,2} \cdot \vec{e}_n \\ & \cdots & \\ \vec{a}_p & = & a_{1,p} \cdot \vec{e}_1 + a_{2,p} \cdot \vec{e}_2 + \cdots + a_{n,p} \cdot \vec{e}_n \end{array}$$

de sorte que $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

Par définition, le rang de la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ est égal au rang de la famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ canoniquement associée aux colonnes de A. Notons $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ de sorte que

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 & = & a_{1,1} \cdot \vec{b}_1 + a_{2,1} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + a_{n,1} \cdot \vec{b}_n \\ \vec{u}_2 & = & a_{1,2} \cdot \vec{b}_1 + a_{2,2} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + a_{n,2} \cdot \vec{b}_n \\ & \cdots & \\ \vec{u}_p & = & a_{1,p} \cdot \vec{b}_1 + a_{2,p} \cdot \vec{b}_2 + \cdots + a_{n,p} \cdot \vec{b}_n \end{array}$$

Considérons l'application linéaire $\varphi : E_n \to \mathbf{K}^n$ définie par $\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Autrement dit, φ est l'unique application linéaire de $\mathbf{K}^n$ sur E_n définie par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(\vec{e}_j) = \vec{b}_j.$$

Comme sa matrice représentative est inversible, φ est un isomorphisme. De plus, par linéarité

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(\vec{a}_j) = \vec{u}_j.$$

Par restriction φ induit donc un isomorphisme de $\mathsf{Vect}\,\{\vec{a}_1;\dots;\vec{a}_p\}$ sur $\mathsf{Vect}\,\{\vec{u}_1;\dots;\vec{u}_p\}$. En particulier, ces deux sous-espaces ont même dimension, *traduisez* :

$$\mathsf{Rg}\,\{\vec{a}_1;\dots;\vec{a}_p\} = \mathsf{Rg}\,\mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$$

▲

Exercice : On se place dans $\mathbf{R}^3$.

1. La famille $\vec{u}_1 = (1,1,2)$, $\vec{u}_2 = (0,1,4)$, $\vec{u}_3 = (1,0,-2)$, $\vec{u}_4 = (-5,16,24)$ est-elle libre ?

2. La famille $\vec{u}_1 = (1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,1,4)$ et $\vec{u}_3 = (1,0,-2)$ est-elle génératrice ?

Exercice : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes échelonnée en degré, c'est-à-dire telle que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad d^\circ P_k = k$$

Montrez que les $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

D'après le **Théorème de la base incomplète**, il est toujours possible de compléter une famille libre en une base et d'extraire une base d'une famille génératrice. La méthode de Gauss permet de réaliser ces opérations en un minimum de calculs :

Exercice :

1. Extraire de la famille $\mathcal{F} = \big((1,1,1,2),\ (-1,2,1,2),\ (-3,0,1,2),\ (1,1,-1,-2)\big)$ une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\mathcal{F}$.

2. Complétez la famille $\mathscr{L} = \big((1,1,1,2),\ (-1,2,1,2)\big)$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

b) Calcul du rang d'une application linéaire

Rappelons que par définition le rang d'une application linéaire a est simplement la dimension de l'image $\mathsf{Im}\,a$. Pour calculer cette dimension, nous disposons du théorème suivant :

Théorème 26.23.— Rang d'une application linéaire
Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n. Notons $\vec{a}_1 = a(\vec{e}_1)$,..., $\vec{a}_p = a(\vec{e}_p)$. Alors

$$\boxed{\mathsf{Rg}\,a = \mathsf{Rg}\,\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p\} = \mathsf{Rg}\,\mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)}$$

Démonstration ▽
Soit $a \in \mathcal{L}(E_p, F_n)$ une application linéaire, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des bases de E_p et F_n.

- Montrons tout d'abord que $\mathsf{Rg}\,a = \mathsf{Rg}\,\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p\}$.
  Pour cela, il suffit de remarquer que l'application induite par a : $a_| : E_p \to \mathsf{Im}\,a$ est surjective. Comme la base $\mathcal{E} = ()\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ est en particulier une famille génératrice de E_p, je déduis de la **Proposition** 24.15 que $(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p)$ est génératrice de $\mathsf{Im}\,a$. Par suite :
  $$\mathsf{Vect}\,\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p\} = \mathsf{Im}\,a$$
  En identifiant leurs dimensions, j'obtiens précisément que $\mathsf{Rg}\,a = \mathsf{Rg}\,\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_p\}$.
- Notons $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ et montrons que $\mathsf{Rg}\,a = \mathsf{Rg}\,A$.
  Pour cela, ramenons-nous dans les espaces $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$. Considérons la matrice I_p. Il s'agit de la matrice représentative dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}_b$ d'une application linéaire φ_p. Ainsi
  $$I_p = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}_{\checkmark}}(\varphi_p)$$
  Comme de plus I_p est inversible, il s'ensuit que φ_p est un isomorphisme de E_p sur $\mathbf{K}^p$.
  De même, il existe un isomorphisme $\varphi_n : F_n \to \mathbf{K}^n$ tel que
  $$I_n = \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{B}_{\setminus}}(\varphi_n)$$
  Nous avons donc le diagramme suivant :
  $$\begin{array}{ccccc} & E_p & \xrightarrow{a} & F_n & \\ \varphi_p & \downarrow & & \downarrow & \varphi_n \\ & \mathbf{K}^p & \xrightarrow[\tilde{a}]{} & \mathbf{K}^n & \end{array}$$

Comme φ_p et φ_n sont des isomorphismes nous avons tout d'abord

$$\mathsf{Rg}\, a = \mathsf{Rg}\, \tilde{a} = \mathsf{Rg}\, \mathbf{M}_{\mathcal{B}_{\surd},\mathcal{B}_{\setminus}}(\tilde{a})$$

De plus, d'après la **Proposition** 26.7,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathcal{B}_{\surd},\mathcal{B}_{\setminus}}(\tilde{a}) &= \mathbf{M}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(\varphi_n) \times \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a) \times \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi_p)^{-1} \\ &= I_n \times A \times I_p = A.\end{aligned}$$

▲

Exercice : On considère l'application linéaire a de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ représentée dans les bases canoniques par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez le rang de a.

2. a est-elle injective ? surjective ?

3. Donnez une base de $\mathsf{Ker}\, a$, $\mathsf{Im}\, a$.

c) Etude d'une matrice

Grâce à la notion de rang de matrice, nous pouvons généraliser le **Théorème** 22.18 aux matrices non nécessairement carrées.

Théorème 26.24.— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors

Il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ telle que $A \times B = I_n$ *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\, A = n$.
Il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ telle que $B \times A = I_p$ *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\, A = p$.

Démonstration ▽
Rappelons tout d'abord le **Lemme** 11.9 :
Etant donnée une application $a : E \to F$, nous avons les équivalences suivantes :
1. a est surjective *ssi* il existe une application $b : F \to E$ telle que $a \circ b = Id_F$.
2. a est injective *ssi* il existe une application $b : F \to E$ telle que $b \circ a = id_E$.

Appliquons ces résultats à l'application linéaire $a \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ canoniquement associée à A. En utilisant en outre le **Théorème** 25.26, il vient :

$$\begin{array}{rll}\text{Il existe } B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \text{ telle que } A \times B = I_n & \textit{ssi} & \text{il existe } b \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p) \text{ tel que } a \circ b = Id_{\mathbf{K}^n} \\ & \textit{ssi} & a \text{ est surjective} \\ & \textit{ssi} & \mathsf{Rg}\, a = n \\ & \textit{ssi} & \mathsf{Rg}\, A = n. \\ \text{Il existe } B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \text{ telle que } B \times A = I_p & \textit{ssi} & \text{il existe } b \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p) \text{ tel que } b \circ a = Id_{\mathbf{K}^p} \\ & \textit{ssi} & a \text{ est injective} \\ & \textit{ssi} & \mathsf{Rg}\, a = p \\ & \textit{ssi} & \mathsf{Rg}\, A = p.\end{array}$$

▲

Comme conséquence, nous obtenons la caractérisation des matrices inversibles :

Théorème 26.25.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors

$$\boxed{A \text{ est inversible } \textit{ si et seulement si } \mathsf{Rg}\, A = n.}$$

En pratique :

- en général, lorsqu'on vous demande de prouver que A est inversible, le calcul explicite de A^{-1} est exigé. Il est alors préférable d'utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.
- En revanche, cette caractérisation est **très utile** pour prouver que A **n'est pas inversible** !
  Dans ce cas, il s'agit de vérifier que $\operatorname{Rg} A < n$.

d) Etude d'un système linéaire

Au **Chapitre 21**, nous avons défini le rang des systèmes échelonnés comme étant le nombre de coefficients diagonaux non nuls. Grâce au **Théorème** 26.20, nous pouvons à présent étendre cette définition de façon naturelle :

On considère le système de n équations linéaires à p inconnues

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Notons

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients ainsi que les colonnes *inconnue* et *second membre* du système ;
- $a : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A, $\vec{x} \in \mathbf{K}^p$ et $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$ les vecteurs canoniquement associés à X et B.

Définition : *On appelle* ***rang du système*** (S) *le rang de la matrice des coefficients.*

Théorème 26.26.— Structure de l'ensemble des solutions
Avec les notations précédentes :

$$\text{le système } (S) \text{ est compatible } \textit{si et seulement si } \vec{b} \in \operatorname{Im} a.$$

En ce cas, il existe $\vec{x}_0 \in \mathbf{K}^p$ tel que $b = a(\vec{x}_0)$. On a alors

$$\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} a$$

En particulier, $\mathcal{S}_o = \operatorname{Ker} a$.

Notation : $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}_o$ *désignent respectivement les ensembles de solutions de* (S) *et* (S_o).

Démonstration ▽
Avec les notations précédentes, le système (S) se traduit vectoriellement par :

$$(S) \iff a(\vec{x}) = \vec{b}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} (S) \text{ est compatible} & \textit{ssi} & \vec{b} \text{ admet au moins un antécédent par } a \\ & \textit{ssi} & \vec{b} \in \operatorname{Im} a \end{array}$$

Si tel est le cas, soit $\vec{x}_0 \in E$ une solution de (S), *i.e.* $a(\vec{x}_0) = \vec{b}$.

Alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, nous avons les équivalences :

$$x \in \mathcal{S} \iff a(\vec{x}) = \vec{b} \iff a(\vec{x}) = a(\vec{x}_0) \iff a(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}_n \iff \vec{x} - \vec{x}_0 \in \operatorname{Ker} a \iff \vec{x} \in \vec{x}_0 + \operatorname{Ker} a$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \vec{x}_0 + \mathsf{Ker}\, a$.
En particulier, si $\vec{b} = \vec{0}$, le système est compatible puisque $a(\vec{0}) = \vec{0}$ et d'après ce qui précède :

$$\mathcal{S}_o = \vec{0} + \mathsf{Ker}\, a = \mathsf{Ker}\, a.$$

▲

Comme conséquence, nous obtenons la généralisation du **Théorème** 21.14 :

Corollaire 26.27.— Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues.
On note r le rang du système (S). Alors

$$r \leq \min\{n, p\}.$$

De plus,

- **si** $r = p$, **alors** pour tout second membre $\vec{b}$, (S) admet au plus une solution,
- **si** $r = n$, **alors** pour tout second membre $\vec{b}$, (S) admet au moins une solution.
- **si** $r = p = n$, **alors** pour tout second membre $\vec{b}$, (S) admet une unique solution.

Démonstration ▽
D'après le **Théorème** 25.26,

- **si** $r = p$, **alors** a est injective.
- **si** $r = n$, **alors** a est surjective.
- **si** $r = p = n$, **alors** a est bijective.

Les résultats découlent alors de la définition même d'application injective, surjective et bijective. ▲

V How To

Représentation matricielle

e) Comment déterminer la matrice représentative d'une famille de vecteurs

Etant donnée une base $\mathcal{E}$ de E_n, tout vecteur $\vec{x}$ se décompose suivant cette base.
Si $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ est une famille de p vecteurs de E_n, pour déterminer la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$, représentative de $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{E}$:

- vous décomposez $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_p$ dans la base $\mathcal{E}$,
- – la première *colonne* de A est formée des coordonnées de $\vec{a}_1$,
  – la deuxième colonne de A est formée des coordonnées de $\vec{a}_2$,
  $\ddots$

f) Comment prouver qu'une famille est une base de E_n

Soit $\mathcal{A}$ une famille de vecteurs de E_n. Pour que $\mathcal{A}$ soit une base de E, il est nécessaire que $\mathcal{A}$ soit constituée de n vecteurs distincts. De plus,

$\mathcal{A}$ est une base de E *si et seulement si* sa matrice représentative dans une base de E est inversible.

g) Comment déterminer la matrice représentative d'une application linéaire

Soient $a \in L(E_p, F_n)$, $\mathcal{E}$ une base de E_p et $\mathcal{F}$ une base de F_n. Pour déterminer la matrice $A = \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(a)$ représentative de a dans ces bases

- vous décomposez $a(\vec{e}_1)$, …, $a(\vec{e}_p)$ dans la base $\mathcal{F}$,
- vous rangez leur coordonnées en colonnes.

h) Comment prouver qu'une application linéaire est un isomorphisme

Soit $a \in L(E_p, F_n)$, $\mathcal{E}$ une base de E_p et $\mathcal{F}$ une base de F_n. Pour que a soit un isom de E_p sur F_n il est nécessaire que $p = n$. De plus,

$$a \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } F \textit{ si et seulement si } \mathbf{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\in)GL_n(\mathbf{K})$$

i) Comment prouver qu'une matrice est inversible

Etant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A est la matrice représentative d'une base, ou d'un isomorphisme, alors A est inversible.

Déterminer le rang

j) Comment calculer le rang d'une matrice A

D'après la **Proposition** 26.15, le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes :

- vous échelonnez A par la méthode du pivot de Gauss
- le rang de A et de la matrice échelonnée ainsi obtenue coïncident.

k) Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$

- vous déterminez la matrice A représentative de $\mathcal{F}$ dans une base.
- le rang de $\mathcal{F}$ est égal au rang de sa matrice représentative.

l) Comment calculer le rang d'une application linéaire a

- vous déterminez la matrice A représentative de a dans des bases.
- le rang de a est égal au rang de sa matrice représentative.

Comment appliquer le rang

m) Pour étudier une famille $\mathcal{F}$ de p vecteurs de E_n

Vous calculez le rang de $\mathcal{F}$:

- si $\mathsf{Rg}\,\mathcal{F} = p$, $\mathcal{F}$ est libre.
- si $\mathsf{Rg}\,\mathcal{F} = n$, $\mathcal{F}$ est génératrice de E_n.
- si $\mathsf{Rg}\,\mathcal{F} = p = n$, $\mathcal{F}$ est une base de E_n.

n) Pour étudier une application linéaire $a \in L(E_p, F_n)$

Vous calculez le rang de a, puis :

- si $\mathsf{Rg}\,a = p$, a est injective.
- si $\mathsf{Rg}\,a = n$, a est surjective.
- si $\mathsf{Rg}\,a = p = n$, a est un isomorphisme de E sur F.

o) Pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Calculez le rang de A, alors A est inversible *si et seulement si* $\mathsf{Rg}\,A = n$.
Cette caractérisation est particulièrement utile pour savoir si une matrice n'est pas inversible !