PROGRAMME DE COLLE S11

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS$^{(1/2)}$

▪▪▪ Limites de fonctions

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f* ***a pour limite*** *ℓ* ***au point*** *a si :*

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I),\quad (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)}$$

Définition : Extensions de la notion de limite —. *définitions quantifiées de limite finie en une extrémité infinie de I, limite infinie en $a \in \bar{I}$, limite infinie en une extrémité infinie de I.*

Définition : *Soit I un intervalle non trivial, $f : I \to \mathbf{R}$ $a \in \overset{\circ}{I}$. On dit que f possède une* ***limite à gauche (resp. à droite)*** *au point a si la restriction de f à $J = I \cap]-\infty, a[$ (resp. $J = I \cap]a, +\infty[$) possède une limite en a.*

Proposition.— Unicité de la limite —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ \bullet\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \end{array}\right) \Rightarrow \quad \ell = \ell'}$$

Théorème*.— Trois paquets —. Soit I un intervalle non trivial, $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors pour tout $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) & = \ell \\ f(a) & = \ell \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) & = \ell \end{cases}}$$

▪▪▪ Propriétés des fonctions possédant une limite

Théorème*.— Caractérisation séquentielle de la limite.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. On a

$$\boxed{\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \iff (\forall u \in I^{\mathbf{N}}), \left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell\right)}$$

Savoir-faire : utiliser la condition nécessaire pour étudier la suite $(f(u_n))$, ou pour établir que f n'a pas de limite en a ou pour étudier la suite $(f(u_n))$.

Proposition.— Si $f : I \to \mathbf{R}$ admet une **limite finie** en $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, **alors** f est bornée au voisinage de a.

Proposition.— Limites et inégalités —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ telles que f et g possèdent des limites en $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

▪ **Si** $\lim\limits_{a} f < \lim\limits_{a} g$, **alors** $f < g$ dans un voisinage de a. ▪ **Si** $f \leq g$ au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{a} f \leq \lim\limits_{a} g$.

Théorèmes d'existence de limites

Théorème*.— Opérations algébriques —. Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$. Alors

▪ $\lim\limits_{x \to a} \lvert f(x)\rvert = \lvert\ell\rvert$.	▪ $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$.
▪ $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$	▪ $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$.
▪ si de plus $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\ell}$	▪ si $\ell = 0^+$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Théorème.— Encadrement, comparaison —. Soit $f, g, h : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \mathbf{R}$

Si	$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in I,\ \lvert g(x)\rvert \leq f(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \end{array}\right),$	**alors**	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
Si	$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{array}\right),$	**alors**	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
Si	$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right),$	**alors**	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$

Théorème.— Changement de variable —. Soit $y : I \to J$ et $f \in J \to \mathbf{R}$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $b \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

Si	$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to a} y(x) = b \\ \bullet\ \lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell \end{array}\right)$	**alors**	$\lim\limits_{x\to a} f \circ y(x) = \ell$

Cas des fonctions monotones

Théorème.— Limite monotone aux bornes de l'intervalle —. Soit $(a, b) \in \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une application **monotone**. Alors

- **Si** f est croissante, **alors**
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
- **Si** f est décroissante, **alors**
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$

Théorème.— Limite monotone à l'intérieur de l'intervalle —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application **monotone**. Alors en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$, f admet des limites *finies* à gauche et à droite. De plus

- **Si** f est croissante, **alors** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
- **Si** f est décroissante, **alors** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Limites des fonctions usuelles

Théorème*.—

1. $\forall a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$

2. $\forall a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lim\limits_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

3. $\forall a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$

4. $\forall a \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\lim\limits_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

5. $\forall a \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\lim\limits_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha$.

6. Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

7. Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$.