Chapitre 10

Fonctions continues sur un intervalle

Sommaire

OBJECTIFS

- ▷ étudier la continuité d'une fonction définie par opération algébrique, ou composition
- ▷ savoir utiliser les théorèmes fondamentaux :
  - **théorème des valeurs intermédiaires**
  - **théorème de la bijection**
  - **image d'un segment par une fonction continue**

Introduction

Après avoir étudié les propriétés générales des fonctions possédant des limites (**Chapitre 8**)[1], nous abordons l'étude des fonctions qui ont la propriété naturelle de posséder une limite en chaque point de leur intervalle de définition I. Ces fonctions, dites *continues sur* I, vérifient des propriétés fondamentales qui sont démontrées dans la troisième partie du chapitre.

I Continuité en un point

1 Définition

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$. On dit que f est **continue au point** a si f admet $f(a)$ comme limite au point a, c'est-à-dire si*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$$

Traduisons la notion de limite finie en un point fini pour obtenir :

Corollaire 10.1.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$, f est continue en a si (et seulement si) :

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0),\ (\exists\eta > 0);\ (\forall x \in I)\big(|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon\big).}$$

Remarque : comme nous l'avons vu au **Chapitre 15**, a étant élément de I, si f possède une limite au point a, alors nécessairement cette limite est $f(a)$. Nous pouvons donc traduire la continuité de f au point a par :

f est continue au point a *si et seulement si* f possède une limite au point a.

2 Continuité à droite et à gauche

Définition : continuité à droite et à gauche

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

- *On dit que f est **continue à gauche en** a si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est **continue à droite en** a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.*

Remarque : bien entendu, la notion de continuité à gauche par exemple n'a de sens que lorsque $I \cap]-\infty, a[$ est non vide. ☺

Exemple : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 0 mais elle n'est pas continue à gauche en ce point.

En pratique : les notions de continuité à gauche et à droite sont très utilisées dans la pratique, car elles peuvent servir à caractériser les fonctions continues en un point $a \in I$, notamment pour les fonctions qui sont définies par des expressions différentes sur deux sous-intervalles. Plus précisément :

1. et les théorèmes d'existence de limites

Théorème 10.2.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

- Si $a \in \overset{\circ}{I}$, alors f est continue en a *ssi* f est continue à gauche et à droite en a.
- Si $a = \max(I)$, alors f est continue en a *ssi* f est continue à gauche en a.
- Si $a = \min(I)$, alors f est continue en a *ssi* f est continue à droite en a.

Démonstration ▽
Il s'agit d'une application directe du **théorème des 3 paquets** (**Proposition** 8.3). ▲

Exemple : Étudions la continuité en 0 de la fonction définie par

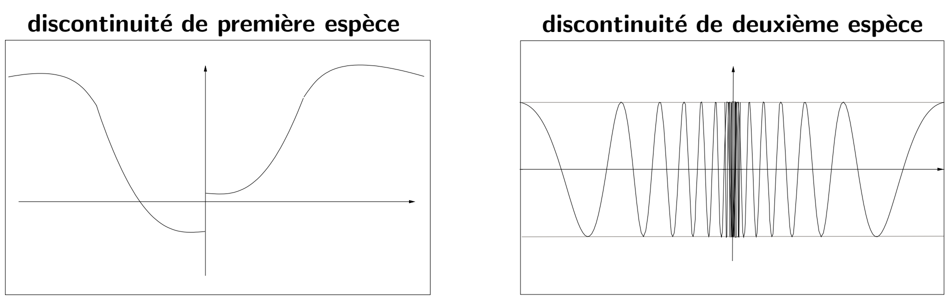
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \sin(x^2) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Remarque : Une fonction qui **admet** au point a des limites à gauche et à droite **différentes** n'est donc pas continue au point a. Mais ce n'est pas le seul cas de fonction discontinue au point a. Il se peut aussi que f **ne possède pas de limite à droite ni/ou à gauche**.

Vocabulaire :

- *dans le premier cas, on dit que f présente une **discontinuité de** $1^{\text{ière}}$ **espèce**.*
- *dans le deuxième cas, on dit que f possède une **discontinuité de** $2^{\text{ième}}$ **espèce**.*

Illustration :



Remarque : si $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction **monotone**, et $a \in \overset{\circ}{I}$, f ne peut **pas** avoir **de discontinuité de deuxième espèce** au point a.
En effet, d'après le **Théorème** 8.18, f possède des limites à gauche et à droite au point a. ☺

Exercice : On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Montrez que f est continue sur $\mathbf{R}$

3 Propriétés fondamentales des fonctions continues en un point

3.a Les fonctions continues sont localement bornées

Théorème 10.3.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

Si f est continue au point a, **alors** f est bornée au voisinage de a.

Remarque : la réciproque est fausse!!

Démonstration ▽
C'est un corollaire immédiat de la **Proposition** 8.8. ▲

3.b Principe de prolongement des inégalités

Théorème 10.4.— Principe de prolongement des inégalités
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$. On suppose que f et g sont continues au point a.

Si $f(a) < g(a)$, **alors** il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V},\ f(x) < g(x)$

Commentaires : cet énoncé est optimal dans le sens que si $f(a) \leq g(a)$, on ne peut rien dire du signe de la fonction $f - g$ au voisinage de a comme le montre l'exemple des fonctions x et x^2 au voisinage de 0.

Exemple : Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Si f est continue en un point $a \in I$ et vérifie $f(a) \neq 0$. Alors dans un voisinage de a dans I, $f(x) \neq 0$. En particulier la fonction $1/f$ est définie au voisinage de a.

Démonstration $\triangledown$
C'est une conséquence immédiate de la **proposition limite et inégalités** (**Proposition** 8.9). ▲

3.c Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 10.5.— Caractérisation séquentielle de la continuité —. Soit $f \in I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$.

$$f \text{ est continue en } a \quad ssi \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbf{N}}\right), \left(\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)\right).$$

Commentaires : en clair, l'image par f de toute suite (x_n) convergente vers a est une suite convergente vers $f(a)$.

Démonstration $\triangledown$
C'est un corollaire immédiat du **Théorème** 8.5. ▲

3.d La continuité est une propriété locale

Pour conclure ce paragraphe, remarquons que la notion de continuité d'une application f au point a est une notion *locale*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des valeurs de la fonction sur son intervalle de définition I, mais seulement des valeurs prises par f *au voisinage de* a. Plus précisément :

Proposition 10.6.— Soit $(f, g) : I \to \mathbf{R} \times \mathscr{F}(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \qquad f(x) = g(x).$$

Alors f est continue au point a *si et seulement si* g est continue au point a.

Démonstration $\triangledown$
Supposons f continue au point a. On montre que g est continue au point a.
Par hypothèse, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(\forall x \in I), \quad (|x - a| < \eta_1 \Rightarrow f(x) = g(x)) \tag{10.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme par hypothèse f continue au point a, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$(\forall x \in I), \quad (|x - a| < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon) \tag{10.2}$$

Posons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Soit alors $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$. D'après (10.1) et (10.2), nous avons

$$|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon.$$

▲

4 Opérations sur les fonctions continues en un point

4.a Opérations algébriques

On déduit immédiatement des propriétés des fonctions possédant une limite, le :

Théorème 10.7.— Opérations algébriques sur les fonctions continues en a
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ un nombre réel.

- **Si** f est continue au point a, **alors** λf est continue au point a .
- **Si** f est continue au point a et $f(a) \neq 0$, **alors** $\dfrac{1}{f}$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $f+g$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $f \times g$ est continue au point a.

Démonstration ▽
C'est l'occasion de relire la preuve du **Théorème** 8.11. ▲

4.b Maximum et minimum de fonctions continues

Proposition 10.8.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I, $a \in I$. Alors

- **Si** f est continue au point a, **alors** $|f|$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $\max(f, g)$ est continue au point a.
- **Si** f et g sont continues au point a, **alors** $\min(f, g)$ est continue au point a.

Démonstration ▽
La continuité de $|f|$ découle directement du **Théorème** 8.11. Montrons les deux dernières assertions.
Notons pour alléger $M = \max(f, g)$ et $m = \min(f, g)$. Ainsi, pour tout point $x \in I$ on a

$$\begin{array}{rcl} f(x)+g(x) & = & m(x)+M(x) \\ |f(x)+g(x)| & = & M(x)-m(x) \end{array}$$

Il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} m & = & \dfrac{(f+g-|f-g|}{2} \\ M & = & \dfrac{(f+g+|f-g|}{2} \end{array}$$

Le résultat en découle par OPA. ▲

4.c Composition des fonctions continues en un point

Proposition 10.9.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$, $a \in I$ et $b \in J$.
On suppose que $f(I) \subset J$ et que $b = f(a)$.

$$\textbf{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet \quad f \text{ est continue en } a \\ \bullet \quad g \text{ est continue en } b \end{array}\right) \quad \textbf{alors } g \circ f \text{ est continue en } a.$$

Démonstration ▽
C'est un corollaire immédiat de la **Proposition** 8.12. ▲

5 Prolongement par continuité

Étant donnée une fonction, il est toujours possible de la prolonger, et ce de plusieurs manières. La question qui anime ce paragraphe est de savoir à quelle condition une fonction continue peut être prolongée en une fonction continue.

Proposition-Définition 10.10.— Soit I un intervalle, $a \in I$. Une fonction $f \setminus \{a\} : I \to \mathbf{R}$ est dite prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie en a, i.e. s'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} xaf(x) = \ell$.

En ce cas, la fonction $\tilde{f} = I \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\boxed{\forall x \in I,\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}}$$

est continue en a.

Vocabulaire : $\tilde{f}$ *s'appelle le* ***prolongement par continuité*** *de* f *en* a.

Démonstration ▽

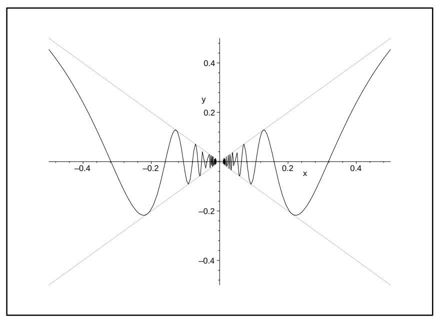
Pour démontrer que la fonction $\tilde{f}$ est continue en a, on utilise le **théorème des 3 paquets**. ▲

En pratique : pour étudier l'existence d'un prolongement par conitnuité au point a, vous étudiez $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f(x)$

Exercice :

Soit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$ la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.
Démontrez que f est prolongeable par continuité au point 0.

Graphe de la fonction $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$



II Continuité globale

1 Définition, exemples

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que f est* ***continue sur*** *I si f est continue en tout point a de I.*

Notation : *On désigne par $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$l'ensemble des fonctions continues sur I.*

Exemples : dans le **Chapitre 8**, nous avons en fait montré que :

- Les polynômes et les fractions rationnelles sont continues sur leurs intervalles de définition.
- Les fonctions trigonométriques sin, cos, tan sont continues sur leurs intervalles de définition.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbf{R}$.
- La fonction logarithme est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$.
- Les fonctions puissances sont continues sur $\mathbf{R}^{+\star}$.

2 Opérations sur les fonctions continues

2.a Opérations algébriques

On déduit du **Théorème** 10.7 le :

Théorème 10.11.— Opérations algébriques sur les fonctions continues
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I et $\lambda \in \mathbf{R}$ un nombre réel.

- **Si** f est continue sur I, **alors** $|f|$ est continue sur I .
- **Si** f est continue sur I, **alors** λf est continue sur I .
- **Si** f est continue sur I et ne s'y annule pas, **alors** $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I.
- **Si** f et g sont continues sur I, **alors** $f + g$ est continue sur I.
- **Si** f et g sont continues sur I, **alors** $f \times g$ est continue sur I.

Remarque : en *combinant* les deux premiers résultats, on vérifie que $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Démonstration ▽
1. Soit $a \in I$ fixé. Par hypothèse, f est continue (sur I donc en particulier) au point a. D'après le **Théorème** 10.7, il s'ensuit que λf est continue au point a.
Nous avons démontré que $\forall a \in I$, λf est continue au point a. Par définition, cela signifie que λf est continue sur I.
2. 3. ... se déduit du **Théorème** 10.7 par la même méthode que ci-dessus. ▲

2.b Maximum et minimum de fonctions continues

Proposition 10.12.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I. Alors

- **Si** f est continue sur I, **alors** $|f|$ est continue sur I.
- **Si** f et g sont continues sur I, **alors** $\max(f, g)$ est continue sur I.
- **Si** f et g sont continues sur I, **alors** $\min(f, g)$ est continue sur I.

2.c Composée des fonctions continues

En ce qui concerne la composée d'applications continues, nous déduisons de la **Proposition** 8.12 le **résultat essentiel** qui suit :

Théorème 10.13.— Composée de deux fonctions continues —. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, R)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R})$ deux fonctions continues. On suppose que $f(I) \subset J$. Alors

$$\boxed{\text{La fonction composée } h = g \circ f \text{ est continue sur } I.}$$

Exercice : Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par $h(x) = x\left(1-(\ln x)^2\right) + \dfrac{\left(1+\sin^2 x\right)^{3/2}-1}{x^2}$.
Vérifiez que $h \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^{+\star}, \mathbf{R})$.

Solution ▽
Sur $\mathbf{R}^{+\star}$, les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ sont continues, donc par opérations algébriques, la fonction $x \mapsto x\left(1-(\ln x)^2\right)$ est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$.
Sur $\mathbf{R}^{+\star}$, la fonction $x \mapsto 1+\sin^2 x$ est continue à valeurs dans $\mathbf{R}^{+\star}$. Comme de plus la fonction $t \mapsto t^{3/2}-1$ est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$, il en résulte par composition que $x \mapsto \left(1+\sin^2 x\right)^{3/2}-1$ est aussi continue sur $\mathbf{R}+\star$. D'autre part, la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est bien définie et donc continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$. Par opérations algébriques, j'en déduis que $x \mapsto \dfrac{\left(1+\sin^2 x\right)^{3/2}-1}{x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$.
Ainsi, h est continue sur $\mathbf{R}^{+\star}$ comme somme de deux fonctions continues sur $\mathbf{R}^{+\star}$. ▲

2.d Restriction d'une fonction continue

Proposition 10.14.— Soit I un intervalle (non trivial) de $\mathbf{R}$, J un sous-intervalle non trivial de I ² et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ une fonction continue sur I.

$$\boxed{\text{La restriction } f|_J \text{ de } f \text{ à } J \text{ est une fonction continue sur } J.}$$

Démonstration ▽
Soit $j : J \hookrightarrow I$ l'injection canonique de J dans I, définie par $(\forall x \in J) \quad j(x) = x$.
Il est clair que j est continue sur J. Comme f est continue sur I et $f|_J = f \circ j$, il résulte du **Théorème** 10.13 que $f|_J$ est continue sur J. ▲

III Les résultats fondamentaux

Dans cette partie, nous démontrerons trois résultats fondamentaux de l'Analyse. Ces résultats peuvent s'énoncer en terme d'image directe d'un intervalle par une application continue.
Rappelons tout d'abord, que d'après le **Théorème** 7.4, les intervalles de $\mathbf{R}$ sont caractérisés par la propriété suivante :

$$(\forall A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})) \quad A \text{ est un intervalle } \ ssi \ \left(\forall (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2\right) \left((a_1, a_2) \in A^2 \Rightarrow [a_1, a_2] \subset A\right).$$

Le *premier résultat* montre que l'**image** par une fonction **continue d'un intervalle** est un intervalle.

Mais en général, une application continue ne préserve pas le *type* de l'intervalle :
Par exemple, la fonction sin est continue de l'intervalle *ouvert non majoré* $]0, +\infty[$ sur l'intervalle *fermé borné* $[-1, 1]$. En fait, on peut construire des exemples de toutes sortes.

Le *deuxième paragraphe* est consacré à l'étude des images des intervalles par une **application continue et strictement monotone**. Vous y êtes désormais habitués, la relation d'ordre[3] joue un rôle tellement fondamental en analyse réelle que nous sommes en droit d'attendre des résultats spectaculaires dans ce contexte !

Dans le troisième paragraphe, nous étudions le cas très particulier des fonctions continues sur un segment. Nous montrons que l'**image** par une application **continue d'un segment est un segment**.

Finalement, nous établissons dans le dernier paragraphe le **Théorème de Heine** qui assure qu'une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

1 Image continue d'un intervalle

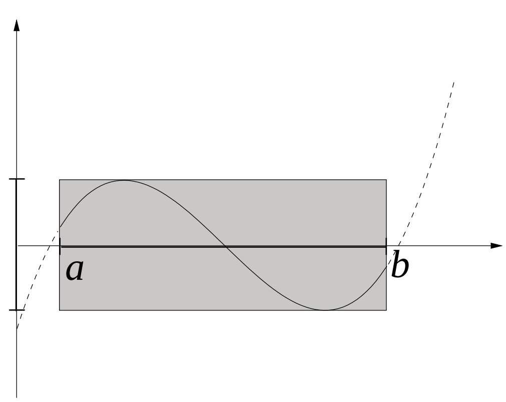
Comme annoncé en introduction, le but de ce paragraphe est d'établir le **résultat fondamental** suivant :

Théorème 10.15.— Image continue d'un intervalle

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue. L'image de I par f est un intervalle de $\mathbf{R}$

Remarque : Comme corollaire, il s'ensuit que l'image par f de tout sous-intervalle de I est encore un intervalle. En effet, si $J \subset I$ est un sous-intervalle de I, il suffit d'appliquer le **Théorème** 10.15 à la restriction[4] $f|_J$ de f à J.

Illustration : L'image continue d'un intervalle est un intervalle



3. et en particulier la **Propriété de la Borne Supérieure**
4. qui est continue d'après la **Proposition** 10.14

Pour démontrer le **Théorème** 10.15, nous allons procéder par étapes. Le premier résultat que nous démontrons est une **version** très utile en **pratique** de ce résultat fondamental.

Théorème 10.16.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\textbf{Si } f(a) \times f(b) \leq 0 \quad \textbf{alors} \quad \text{il existe un élément } c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = 0.}$$

Commentaires : en clair, si une fonction continue sur $[a, b]$ change de signe, elle doit s'annuler !

En pratique : ce théorème se révèle particulièrement efficace pour la **résolution** dans un intervalle I des **équations** du type $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur I. En effet, si f est une fonction de I vers $\mathbf{R}$. *Supposez* que a, b soient éléments de I vérifiant : $f(a) \times f(b) \leq 0$. Alors l'équation

$$f(x) = 0$$

possède (au moins) une solution dans $[a, b]$.

Exercice : Soit $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré impair.

1. Montrez sans utiliser le **Théorème fondamental de l'algèbre** que P possède (au moins) une racine réelle.
2. Montrez en utilisant le **Théorème fondamental de l'algèbre** que P possède (au moins) une racine réelle.

Une démonstration possible du théorème 10.16 repose *directement* sur le **Théorème de la borne supérieure** et vous est proposée en exo ci-dessous. La démonstration que je donne ici repose sur la construction –déjà évoquée au **Chapitre 7**– de suites adjacentes par **dichotomie** :

Principe de la démonstration

Supposons pour fixer les idées, que $f(a) < 0$ et $f(b) \geq 0$: je cherche $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Posons $m = \frac{a+b}{2}$. Deux cas se présentent :

1. si $f(m) < 0$, je pose $a_1 = m$, $b_1 = b$ de sorte que $f(a_1) < 0$, $f(b_1) \geq 0$.
2. si $f(m) \geq 0$, je pose $a_1 = a$, $b_1 = m$ de sorte que $f(a_1) < 0$, $f(b_1) \geq 0$

Bilan : Dans les deux cas, la fonction $f_|$ est continue sur l'intervalle $[a_1, b_1]$ et change de signe aux bornes. Nous retrouvons donc les conditions initiales... et on ne voit pas bien l'intérêt de diviser l'intervalle initial ! C'est ici que nous avons besoin d'une

Idée géniale ! si le théorème est vrai pour toute fonction continue sur un intervalle, il doit être vérifié sur l'intervalle $[a_1, b_1]$. Par conséquent, il doit exister $c \in [a_1, b_1]$ tel que $f(c) = 0$. L'intérêt de la manipulation apparaît alors plus clair : plutôt que de chercher une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$, nous pouvons chercher une solution sur l'intervalle deux fois plus petit $[a_1, b_1]$! *Intuitivement, le domaine de recherche étant deux fois plus petit, nos chances de trouver une solution sont donc doublées !!* ☺

L'apparition des suites adjacentes : on répète le procédé de division d'intervalles décrit ci-dessus : nous obtenons ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ de longueur de plus en plus petite (on divise par deux à chaque fois) sur lesquels f est continue et change de signe. La démonstration montre que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et de même limite c.

L'hypothèse de continuité : comme f est continue, la caractérisation séquentielle de la continuité montre que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont convergentes de limite commune $f(c)$. Par passage à la limite dans une inégalité, on en déduit finalement que $f(c) = 0$. ☺

Fin du principe de la démonstration

Démonstration ▽
Supposons sans perte de généralité que $f(a)le0$ et $f(b) \geq 0$. On construit par récurrence des suites $(a_n) \in I^{\mathbf{N}}$ et $(b_n) \in I^{\mathbf{N}}$ telles que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$:

(C_n)

- $a_0 \leq \cdots \leq a_n$, $b_0 \geq \cdots \geq b_n$
- $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$
- $f(a_n) < 0$, $f(b_n) \geq 0$

Initialisation : posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ de sorte que $f(a_0) < 0$ et $f(b_0) \geq 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons construits $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ vérifiant les trois • ci-dessus. Considérons le milieu $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ du segment $[a_n, b_n]$. Deux cas se présentent :

- ▶ Si $f(c_n) \leq 0$, je pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ de sorte que
  - $a_0 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$, $b_0 \geq \cdots \geq b_n = b_{n+1}$.
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) = f(c_n) < 0$, $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$
- ▶ Sinon, $f(c_n) > 0$, je pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ de sorte que
  - $a_0 \leq \cdots \leq a_n = a_{n+1}$, $b_0 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1}$.
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) = f(a_n) < 0$, $f(b_{n+1}) = f(c_n) \geq 0$
- ▶ Dans les deux cas, nous avons construit a_{n+1} et b_{n+1} de sorte que
  - $a_0 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1}$, $b_0 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1}$.
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) < 0$, $f(b_{n+1}) \geq 0$

Conclusion : par récurrence, nous avons construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0$$

Par conséquent, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Le théorème de convergence des suites adjacentes, permet d'affirmer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite. Appelons $c \in [a, b]$ leur limite commune.
Comme f est continue sur I, elle est en particulier continue au point $c \in I$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité (**Théorème** 8.5) il en résulte que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont toutes deux convergentes de limites $f(c)$.
De plus $\forall n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$. On en déduit en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans ces inégalités que $f(c) = 0$. ▲

Exercice : Une autre démonstration du **Théorème** 10.16 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
On note $A = \{x \in [a, b];\ f(x) \leq 0\}$.

1. Montrez que A possède une borne supérieure c

2. Démontrez en raisonnant par l'absurde que $f(c) = 0$.

Nous pouvons en déduire le *célèbre*

Théorème 10.17.— Théorème des valeurs intermédiaires
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$ d'éléments de I, f atteint toute valeur γ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\Big(\forall (a, b) \in I^2,\ \forall \gamma \in \mathbf{R}\Big), \quad \Big(\gamma \in [f(a), f(b)] \Rightarrow\ \exists c \in I, \quad f(c) = \gamma.\Big)}$$

Remarque : La démonstration de ce **Théorème** montre en réalité que la solution c de l'équation $f(x) = 0$ est comprise entre a et b. Il n'est cependant pas nécessaire de modifier de quelque manière l'énoncé de ce théorème. Il suffit de l'appliquer à l'intervalle $I = [a, b]$!

Démonstration ▽
Soit $(a, b) \in I^2$. On peut supposer sans perte de généralité que $f(a) \leq f(b)$ [5]. Fixons $\gamma \in [f(a), f(b)]$.
Introduisons alors la fonction $g : I \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in I,\ g(x) = f(x) - \gamma.$$

D'après les propriétés algébriques des fonctions continues, la fonction g est continue sur I. De plus $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$.
D'après le **Théorème** 10.16, il existe donc $c \in I$ tel que $g(c) = 0$. C'est-à-dire $f(c) = \gamma$. ▲

5. *Sinon* $[f(a), f(b)] = \emptyset$ et il n'y a rien à démontrer !

A présent, la preuve du **Théorème** 10.15 est aisée.

Démonstration du Théorème 10.15 ▽

Soit I un intervalle de **R**. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Pour cela, nous utilisons le **Théorème** 7.4 : donnons-nous deux points y et y' de l'image $f(I)$ de I par f, tels que $y < y'$. Il s'agit de prouver que $[y, y']$ est entièrement contenu dans $f(I)$.

Par définition puisque y et y' sont éléments de $f(I)$, il existe (au moins) deux points x et x' dans I tels que $y = f(x)$ et $y' = f(y)$. Il suffit alors d'appliquer le **Théorème** 10.17 :

Soit $\gamma \in [y, y']$, il existe $c \in I$ tel que $\gamma = f(c)$. Par définition cela signifie que $\gamma \in f(I)$. ▲

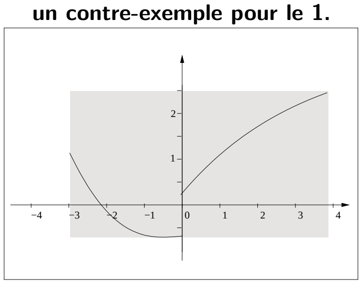
Exercice : Que dire de la réciproque du **Théorème** 10.15 ? *Elle est fausse !*

1. Donnez un exemple de fonction $f : I \to \mathbf{R}$ **non continue sur I** telle que $f(I)$ soit un intervalle.
2. Donnez un exemple de fonction $f : I \to \mathbf{R}$ **non continue sur I** telle que l'image par f de *tout* sous-intervalle de I soit un intervalle.

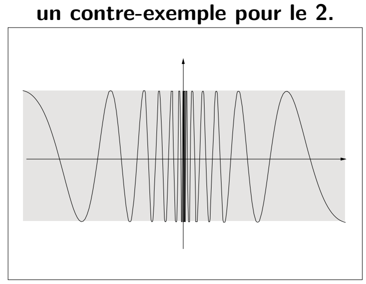
Solution ▽

En images :

un contre-exemple pour le 1.



un contre-exemple pour le 2.



▲

Exercice : Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Démontrez que

- ou bien $f > 0$, *i.e.* $\forall x \in I,\ f(x) > 0$,
- ou bien $f < 0$, *i.e.* $\forall x \in I,\ f(x) < 0$.

2 Théorème de la bijection

2.a Continuité et monotonie

La démonstration du **Théorème** 10.15 qui repose sur la construction de suites adjacentes , montre une fois de plus, l'importance de la relation d'ordre en analyse réelle. En conséquence, les fonctions monotones[6] sont en quelque sorte des fonctions *idéales*, puisqu'elles sont les fonctions *compatibles* avec la relation d'ordre.

Pour les questions de continuité, elles se comportent *localement* aussi bien qu'on peut l'espérer, puisqu'elles ne peuvent présenter que des discontinuités de première espèce. Du point de vue *global*, elles sont tout aussi exceptionnelles :

D'après le **Théorème** 10.15, l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle. Comme nous l'avons vu en exercice à la fin du paragraphe précédent, la réciproque est fausse ... en général !

Théorème 10.18.— continuité globale des fonctions monotones

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Alors

$$\boxed{f \text{ est continue sur } I \textit{ si et seulement si } f(I) \text{ est un intervalle.}}$$

6. tout comme les suites monotones dans le **Chapitre 6**

Commentaires : si ce théorème vous paraît théorique et de peu d'utilité dans la pratique, regardez plutôt l'exercice qui suit :

Exercice : Démontrez **en une ligne** [7], la continuité des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ sur leurs intervalles de définition respectifs ... *Spectaculaire, non ?*

Démonstration ▽
D'après le **Théorème** 10.15, la *condition est nécessaire*.
Montrons que la *condition est suffisante* :
Soit donc f une application monotone sur I telle que $f(I)$ soit un intervalle. Pour *fixer les idées*, supposons que f soit croissante sur I. On montre que f est continue sur I. Soit $a \in I$, il s'agit de prouver que f est continue au point a. Pour cela, j'utilise évidemment la continuité à gauche et à droite car je sais, d'après le **Théorème** 8.18 et 8.17 que ces limites existent pour toute fonction monotone sur I.
Il y a deux cas :

- soit $a \in \overset{\circ}{I}$
- soit $a \in I \setminus \overset{\circ}{I}$

Traitons par exemple le cas $a \in \overset{\circ}{I}$. **Démontrons par l'absurde que f est continue en a.** Supposons *au contraire* que f soit discontinue au point a. La fonction f étant croissante, elle possède des limites à gauche et à droite au point a. Notons $f(a^-)$ et $f(a^+)$ ces limites. Comme f est discontinue au point a, $\mathrm{NON}\big(f(a^+) = f(a) \text{ et } f(a^-) = f(a)\big)$.
Je suppose [8] que $f(a^-) \neq f(a)$. D'après le **Théorème** 8.18, je sais que $f(a^-) \leq f(a)$, par conséquent, mon hypothèse se traduit par $f(a^-) < f(a)$, c'est-à-dire encore $]f(a^-), f(a)[\neq \emptyset$.

$$\text{Soit donc } \gamma \in]f(a^-), f(a)[.$$

Comme $a \in \overset{\circ}{I}$, il existe $(\alpha, \beta) \in I$ tels que $\alpha < a < \beta$. On obtient alors une contradiction en procédant de la manière suivante.

- D'une part, comme f est croissante, $f(\alpha) \leq f(a^-) \leq f(a) \leq f(\beta)$. Par conséquent, $\gamma \in [f(\alpha), f(\beta)]$. Or, $f(\alpha), f(\beta)$ sont éléments de $f(I)$. Comme **par hypothèse** $f(I)$ est un intervalle il en résulte que le segment $[f(\alpha), f(\beta)]$ est entièrement contenu dans $f(I)$. En particulier,
$$\gamma \in f(I). \tag{10.3}$$
- D'autre part, montrons que pour tout $x \in I$, $f(x) \neq \gamma$. En effet, soit $x \in I$. Il y a trois cas :
  - Si $x < a$, alors par le **Théorème** 8.18 $f(x) \leq f(a^-)$. En particulier $f(x) < \gamma$.
  - Si $x = a$, alors $f(x) \neq \gamma$ car $\gamma \in]f(a^-), f(a)[$.
  - Si $x > a$, comme f est croissante, il s'ensuit que $f(x) \geq f(a) > \gamma$. En particulier $f(x) \neq \gamma$.

  Finalement, nous avons démontré que
$$\forall x \in I,\ f(x) \neq \gamma. \tag{10.4}$$

Ainsi, nous avons (10.3) et (10.4), ce qui est **absurde**.

Le cas où a est une extrémité de I se traite de manière tout à fait analogue ... *je vous le laisse en exercice.* ▲

2.b Continuité et stricte monotonie

Nous avons démontré dans le paragraphe **Continuité globale** que la continuité des fonctions est preservée par *opérations algébriques* ainsi que par *composition*. Mais il existe un autre procédé permettant de construire de nouvelles fonctions : il s'agit de l'*application réciproque* d'une fonction bijective.
L'objet de ce paragraphe est de savoir si l'application réciproque d'une fonction bijective et continue est automatiquement continue. Il s'agit du *fameux*

7. la même pour toutes les fonctions proposées !
8. sans perte de généralité

Théorème 10.19.— Théorème de la bijection
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application **continue et strictement monotone** sur I. Alors

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur son image } f(I).}$$

Plus précisément,

- $f(I)$ est un intervalle, noté J
- $f : I \to J$ est une bijection de I sur J,
- $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.
- $f^{-1} : J \to I$ est continue de J sur I.

En pratique : on peut même prédire le type de l'intervalle J connaissant celui de I et la monotonie de f. Comme $J = f(I)$, il s'ensuit que $\overset{\circ}{J} =]\inf_I f, \sup_I f[$.

En ce qui concerne les extrémités de J, le **Théorème** 8.17 nous apprend que les bornes $\sup_I f$ et $\inf_I f$ sont les limites de f aux bornes de I. Nous en déduisons le tableau suivant :

	$I = [a, b]$	$I =]a, b]$	$I = [a, b[$	$I =]a, b[$
$f \nearrow$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) =]\lim_a f(x), f(b)]$	$f(I) = [f(a), \lim_b f[$	$f(I) =]\lim_a f, \lim_b f[$
$f \searrow$	$f(I) = [f(b), f(a)]$	$f(I) = [f(b), \lim_a f[$	$f(I) =]\lim_b f, f(a)]$	$f(I) =]\lim_b f, \lim_a f[$

Démonstration $\triangledown$

1. D'après le **Théorème des valeurs intermédiaires**, f étant continue sur l'intervalle I, $f(I)$ est un intervalle.
2. $f : I \to J$ est surjective par construction de J. De plus f est strictement croissante, donc d'après la **Proposition** 3.5, elle est aussi injective. En conclusion $f : I \to J$ est bijective.
3. Soit donc $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque de f. D'après le **Corollaire** 3.6, f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.
4. Enfin, par le **Théorème** 10.18, f^{-1} est continue car $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle.

▲

Exercice : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction rationnelle définie par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2\,x^2}{1 + x}.$$

1. Démontrez que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que vous expliciterez.
2. Soit $g : J \to [1, +\infty[$ l'application réciproque de f. Dressez le tableau de variation de g en précisant les limites de g aux bornes de J.
3. Etudiez la limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Solution $\triangledown$

1. *f est une fraction rationnelle définie sur $[1, +\infty[$. Elle est donc continue et même dérivable sur $[1, +\infty[$. Comme de plus $f'(x) = 2 - \frac{2}{(1 + x^2)} > 0$, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.*
   *D'après le **Théorème de la bijection**, f étant strictement monotone et continue, elle réalise une bijection de I sur son image $J = f([1, +\infty[)$. De plus, comme f est croissante, nous avons $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$, c'est-à-dire $J = [1, +\infty[$.*

2. *Soit $g : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ l'application réciproque de f. g est strictement croissante et bijective de $[1,+\infty[$ dans lui-même. Par conséquent, d'après le* **Théorème de la bijection** *$g(1)=1$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$.*

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. *Comme $\lim_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$, j'en déduis par changement de variable que*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f\circ g(t)}{g(t)} = 2$$

Comme $f\circ g = Id$, c'est-dire que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{g(t)} = 2$.

2.c Application réciproque d'une fonction continue

Comme conséquence du **Théorème de la bijection**, nous démontrons

Théorème 10.20.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

On suppose que f réalise une **bijection** de l'intervalle I de $\mathbf{R}$ sur J. Alors

L'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f est continue sur J.

Commentaires : en clair, l'application réciproque d'une fonction bijective et continue sur un **intervalle** de $\mathbf{R}$ est **automatiquement** continue.
Lorsque l'application f est strictement monotone sur I, ceci résulte immédiatement du **Théorème de la bijection**. Ainsi, la démonstration du **Théorème** 10.20 se ramène à prouver le :

Lemme 10.21.— Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue sur I. Alors f est strictement monotone.

Démonstration $\triangledown$

L'idée de la démonstration est de raisonner par l'*absurde*. Supposons que f ne soit ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

Il existe alors $(x,y,z)\in I^3$ tels que $x<y<z$ mais tels que $f(y)\notin]f(x),f(z)[\cup]f(z),f(x)[$.

Comme f est injective, l'un de ces deux intervalles est non vide. Pour fixer les idées, supposons que $f(x)<f(z)$. Deux cas se présentent, soit $f(y)<f(x)$, soit $f(y)>f(z)$.[9] Supposons par exemple que que $f(y)>f(z)$.

Nous avons donc

$$x<y<z \quad \text{et} \quad f(x)<f(z)<f(y).$$

Considérons alors la restriction $f|$ de f à l'intervalle $[x,y]$. Posons $\gamma = f(z)$. Par hypothèse $\gamma\in]f(x),f(y)[$. D'après le **Théorème des valeurs intermédiaires**, il en résulte l'existence d'un $c\in]x,y[$ tel que $f(c)=\gamma$. Comme $x<c<y<z$, en particulier $c\neq z$ et pourtant $f(c)=f(z)$, ce qui *contredit* l'injectivité de f. ▲

Remarque : le **Théorème** 10.20 ne possède pas d'analogue pour les fonctions qui ne sont pas définies sur un intervalle, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Exemple : La fonction $f : [0,1[\cup[2,3] \to [0,2]$ définie par

$$\forall x\in[0,1[\cup[2,3], \quad f(x) = \begin{cases} 2-\sqrt{x} & \text{si } x\in[0,1[\\ 1-(x-2)^2 & \text{si } x\in[2,3] \end{cases}$$

est bijective, continue mais son application réciproque n'est pas continue.

3 Image continue d'un segment

D'après le **Théorème** 10.15, l'image par une fonction continue d'un intervalle. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer que l'image par une fonction continue d'un segment est un segment. Plus précisément, nous allons prouver le

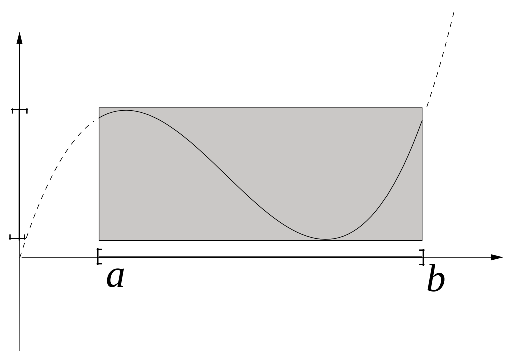
9. faites un dessin !

Théorème 10.22.— Image continue d'un segment
Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors

$$\boxed{f([a, b]) \text{ est un segment.}}$$

Commentaires : ce théorème, qui semble peut-être très *théorique* est en réalité un outil fondamental pour l'étude des *problèmes d'optimisation* : c'est-à-dire pour trouver le minimum ou le maximum d'une fonction continue [10].

Illustration : L'image continue d'un segment est un segment



Comme pour le **Théorème** 10.15, la démonstration du **Théorème** 10.22 se fera en plusieurs étapes. Nous démontrons le

Théorème 10.23.— Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors

$$f([a, b]) \text{ est une partie bornée de } \mathbf{R}.$$

Commentaires : en clair, cela signifie que si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors les bornes $\inf_{[a,b]} f$ et $\sup_{[a,b]} f$ sont réelles.

Remarque : Ce résultat est à rapprocher du **Théorème** 10.3. En effet, si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur I, d'après le **Théorème** 10.3, nous savons qu'elle est *localement bornée*, *i.e.* bornée *au voisinage* de chaque point de I. le théorème ci-dessus montre que lorsque $I = [a, b]$ est un **segment**, la même hypothèse de continuité entraîne que la fonction f est *globalement bornée*.
Résumons : l'hypothèse de continuité dans le théorème ci-dessus est une *propriété locale*. La conclusion, en revanche est une *propriété globale*.
C'est la raison pour laquelle on dit que le **Théorème** 10.23 est un *passage du local au global*.

Démonstration $\triangledown$
En appliquant le résultat suivant à $|f|$, il suffit de prouver que toute application continue sur un segment est majorée.
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrons par l'absurde que f est majorée sur $[a, b]$.
Supposons *au contraire* que f n'est pas majorée. En ce cas, considérons un entier $n \in \mathbf{N}$. n n'est certainement pas un majorant de f. Par conséquent, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$.

Ainsi, nous avons construit une suite $(x_n) \in [a, b]^{\mathbf{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(x_n) \geq n$$

Comme la suite (x_n) est bornée, le **Théorème de Bolzano-Weierstrass** une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ extraite de (x_n) qui converge vers ℓ.

10. minimiser un coût et maximiser un gain, voilà qui semble bien *concret*, n'est-ce pas ?

Or pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, nous avons :

- $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$
- $f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n)$

Par passage à la limite dans une inégalité, le premier • assure que $\ell \in [a,b]$. Le deuxième • montre par comparaison que la suite $f(x_{\varphi(n)})$ est divergente vers $+\infty$. Ainsi

- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell)$ $(TCSC)$

ce qui est absurde. ▲

Comme deuxième étape, nous démontrons le

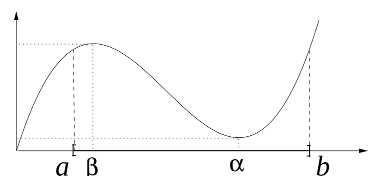
Théorème 10.24.— Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ un fonction **continue sur le segment** $[a,b]$. Alors

$$\boxed{f \text{ est bornée et atteint ses bornes.}}$$

Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Notation : *Bien sûr, on peut noter* $f(\alpha) = \min\limits_{[a,b]} f$ *et* $f(\beta) = \max\limits_{[a,b]} f$.



Démonstration ▽

D'après le **Théorème** 10.23 f admet des bornes supérieure et inférieure sur $[a,b]$. Notons $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{[a,b]}$.

1. *Montrons l'existence d'un élément $\beta \in [a,b]$ tel que $f(\beta) = M$*
Soit alors $n \in \mathbf{N}$. Comme $M = \sup_{[a,b]} f$, il existe, d'après la **Caractérisation de la borne supérieure** (cf **Théorème** 7.3) un élément x_n du segment $[a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} \leq f(x_n) \leq M \tag{10.5}$$

Le **théorème de convergence par encadrement** permet de déduire de (10.5) que $\big(f(x_n)\big)$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M.$$

D'autre part, comme la suite (x_n) est bornée, elle possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. Notons β sa limite. Par passage à la limite dans une inégalité, il est clair que $\beta \in [a,,b]$. En particulier, f est continue en β. Par conséquent, le **Théorème de la caractérisation séquentielle de la continuité** montre que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)} = f(\beta).$$

Par unicité de la limite, il en résulte finalement que

$$f(\beta) = M.$$

2. *Montrons l'existence d'un élément $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = m$*
En appliquant la première partie de la démonstration à la fonction opposée de f, nous obtenons l'existence d'un élément $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = m$.

▲

Voici un corollaire du **Théorème** 10.24 très utile en pratique.

Corollaire 10.25.— Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.

Si f est strictement positive sur $[a,b]$, **alors** f est minorée par un nombre δ strictement positif.

Commentaires : Ainsi, si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors l'implication suivante est vraie :

$$\Big((\forall x \in [a,b]),\ f(x) > 0 \Big) \Rightarrow \Big((\exists \delta > 0),\ (\forall x \in [a,b]),\ f(x) \geq \delta \Big).$$

Démonstration $\triangledown$

D'après le **Théorème** 10.24 il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \inf_[a,b] f$. Posons $\delta = f(\alpha)$. Par hypothèse, $\delta = f(\alpha) > 0$. De plus par définition, $\forall x \in [a,b]\ f(x) \geq \delta$. ▲

La démonstration du **Théorème** 10.22 tient *à présent* en une ligne !

Démonstration du Théorème 10.22 $\triangledown$

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. D'après le **Théorème** 10.24, il existe m et M **dans** $f([a,b])$ tels que

$$f([a,b]) \subset [m,M].$$

Or d'après le **Théorème** 10.15 $f([a,b])$ est un intervalle. Par conséquent, si m et M sont éléments de $f([a,b])$, alors [11], il en résulte que :

$$[m,M] \subset f([a,b]).$$

Finalement, nous avons démontré par double-inclusion que $f([a,b]) = [m,M]$. ▲

11. d'après le **Théorème** 7.4

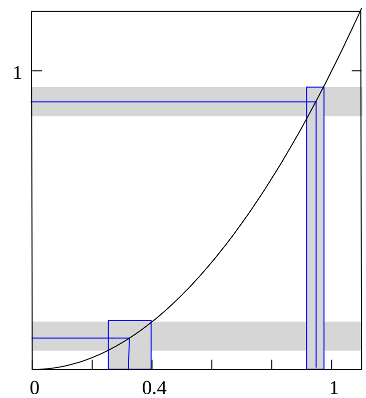
IV COMPLÉMENTS : continuité uniforme

1 Définition

1.a Exemple introductif

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I. En ce cas, par définition,

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\forall x \in I),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall y \in I),\quad (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon)$$



Prenons par exemple la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x^2$. Fixons un réel ε strictement positif. En chaque point $x \in \mathbf{R}$, f est continue en x. Il existe donc $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall y \in I, |x-y| \leq \eta_x \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$

Remarquons que η_x dépend de x, comme le montre l'illustration ci-contre. En particulier, on comprend sur cet exemple qu'il n'est pas possible de trouver $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$

Ceci conduit à la notion de continuité uniforme sur un intervalle :

1.b Fonctions uniformément continues

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f **est uniformément continue sur** I si :*

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall (x,y) \in I^2),\quad (|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon)}$$

Commentaires : en clair, f est uniformément continue sur I si f est continue en tout point a de I et en plus, pour chaque $\varepsilon > 0$, η peut être choisi indépendamment de a.

Exemple : une fonction affine, comme $x \mapsto 3x + 2$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

1.c Lien avec la continuité

Proposition 10.26.— Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration ▽
Soit $a \in I$ fixé, montrons que f est continue en a.
Soit $\varepsilon > 0$ comme f est uniformément continue sur I, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$. Appliquons la propriété universelle ci-dessus au couple $(x,a) \in I^2$, il en résulte que $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. ▲

Remarque : la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple introductif.

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x^2$. Montrez que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$.

Solution ▽
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons qu'il n'existe pas $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$

Soit $\eta > 0$ fixé. Posons $x_\eta = \dfrac{\varepsilon}{\eta}$ et $y_\eta = x_\eta + \eta$.
On a alors les estimations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} |x_\eta - y_\eta| & = & \eta \\ \big|f(x_\eta) - f(y_\eta)\big| & = & |x_\eta^2 - y_\eta^2| = |x_\eta + y_\eta||x_\eta - y_\eta| \\ & = & 2\varepsilon + \eta^2 \\ & > & 2\varepsilon \end{array}$$

Ainsi, f n'est pas uniformément continue sur **R**. ▲

1.d Fonctions lipschitziennes

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, $k \in \mathbf{R}^+$. On dit que f est lipschitzienne de constante k, ou plus simplement k-lipschitzienne sur I si*

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|}$$

Commentaires : les accroissements d'une fonction lipschitzienne sont dominés par ceux de l'identité.

Exemples :

- $x \mapsto 2x + 8$ est 2-lipschitzienne ;
- sin, cos sont 1-lipschitziennes car pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} \big|\sin x - \sin y\big| & \leq & 2\Big|\cos\dfrac{x+y}{2}\Big|\,\Big|\sin\dfrac{x-y}{2}\Big| \\ & \leq & |x - y| \\ \big|\cos x - \cos y\big| & \leq & 2\Big|\sin\dfrac{x+y}{2}\Big|\,\Big|\sin\dfrac{x-y}{2}\Big| \\ & \leq & |x - y| \end{array}$$

Proposition 10.27.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction k-lipshitzienne. Alors f est uniformément continue sur I.

Exercice : Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ la fonction racine carrée : $\forall x \in \mathbf{R}^+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrez que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$.

2. Montrez que f n'est pas lipschitzienne.

Solution ▽

1. *Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, remarquons que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Il en résulte que*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$$

Par suite, $\eta = \varepsilon^2$ convient.

2. *Supposons au contraire que f soit lipschitzienne de constante k. Alors*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq k|x - 0|$$

Ce qui est absurde vu que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$. ▲

Exercice : soit $q \in \mathbf{Q}^\star$ un nombre rationnel non nul.

1. Montrez que $H = q\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est un sous-groupe dense de $(\mathbf{R}, +)$.

2. Montrez que $\{\cos(qn),\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

3. En déduire que pour tout $\ell \in [-1, 1]$, il existe une suite extraite de $\big(\cos(nq)\big)$ convergente de limite ℓ.

Solution ▽

1. *$H = q\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est un sous-groupe dense de $(\mathbf{R}, +)$ car $\dfrac{q}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$*

2. *Soit $(x, y) \in [-1, 1]^2$ tel que $x < y$. On montre l'existence d'un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que*

$$x < \cos(nq) < y$$

Posons $\theta = \operatorname{Arccos} \dfrac{x+y}{2}$ et $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2}$. Comme H est dense, $H \cap]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$ est non vide. Il existe donc $(m, k) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$h = qm + 2k\pi \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$$

Comme $|h - \theta| < \varepsilon$, et que la fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne, il s'ensuit que

$$|\cos h - \cos\theta| < \varepsilon$$

Par construction de θ et ε, ceci revient à dire que $\left|\cos(mq) - \dfrac{x+y}{2}\right| < \dfrac{y-x}{2}$. En particulier, $x < \cos(mq) < y$. Finalement, posons $n = |m|$. On a bien $n \in \mathbf{N}$ et

$$x < \cos(nq) < y$$

3. *Il suffit d'appilquer la caractérisation séquentielle de la densité. Soit $\ell \in [-1, 1]$ et $N \in \mathbf{N}^\star$. Comme $\{\cos(qn),\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, il intersecte l'intervalle $]\ell - \frac{1}{N}, \ell + \frac{1}{N}[\cap [-1, 1]$. Par conséquent, il existe un entier n tel que*

$$\left|\cos(nq) - \ell\right| \leq \frac{1}{N}$$

En utilisant cette propriété de façon répétée, on construit par récurrence une suite extraite de $\big(\cos(nq)\big)$ convergente de limite ℓ. ▲

2 Uniforme continuité des fonctions continues sur un segment

Comme nous l'avons vu dans la première partie du chapitre, la continuité uniforme est une propriété globale. En ce sens, elle dépend de l'intervalle en considération. Par exemple, comme nous l'avons démontré, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$. En revanche, l'inégalité :

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2A|x - y|,$$

valide pour tout couple (x, y) d'éléments du segment $[0, A]$, montre que la fonction carrée est lipschitzienne sur tout segment $[0, A]$. En particulier, elle est donc uniformément continue sur $[0, A]$.
Il s'agit là d'une propriété générale des fonctions continues sur un segment, à savoir le

Théorème 10.28.— Théorème de Heine
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors

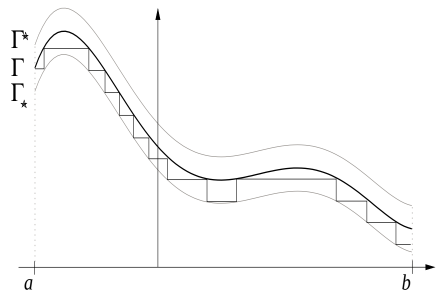
$$\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } [a, b].}$$

Commentaires : pour bien comprendre ce théorème, il faut comparer les définitions quantifiées de la continuité (C) sur $[a, b]$ et de la continuité uniforme (UC) sur $[a, b]$:

- $(C) : (\forall\varepsilon > 0), (\forall x \in [a, b])\ (\exists\eta > 0),\ (\forall y \in [a, b]),\ \ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$
- $(UC) : (\forall\varepsilon > 0),\ (\exists\eta > 0),\ (\forall(x, y) \in [a, b]^2),\ \ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$

Si f est continue sur $[a, b]$, fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque $x \in [a, b]$, il existe un nombre $\eta(\varepsilon, x) > 0$ dépendant de ε ET de x, tel que, ... Le théorème de Heine, consistera donc à prouver l'existence d'un $\eta(\varepsilon)$, **ne dépendant que de** ε tel que pour tout $x \in [a, b]$, ...
Pour cette raison, on dit que le théorème de Heine est un *passage du local au global.*

Illustration :



Démonstration ▽

La démonstration sera par l'**absurde**. Supposons *au contraire* que f est continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue, et cherchons une contradiction.

L'hypothèse f n'est pas uniformément continue se traduit par l'existence d'un réel $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel :

$$\forall \eta > 0,\ \exists (x_\eta, y_\eta) \in [a, b],\ |x_\eta - y_\eta| \leq \eta\ ET\ |f(x_\eta) - f(y_\eta| > \varepsilon_0$$

Appliquons cette propriété universelle en η en choisissant $\eta = \dfrac{1}{n+1}$. Il existe donc deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de $[a, b]$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}\ ET\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

Comme les suites (x_n) et (y_n) sont bornées le **Théorème de Bolzano-Weierstrass** s'applique : quitte à extraire des sous-suites, nous pouvons supposer que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. De plus l'inégalité

$$\forall n \in \mathbf{N}, |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

montre que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes et de même limite. Notons c cette limite commune. L'encadrement

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a \leq x_n \leq b$$

montre par passage à la limite dans une (deux) inégalités que $c \in [a, b]$. En ce cas, l'inégalité

$$\forall n \in N,\quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

Montre que les suites images $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ne sont certainement pas convergentes et de même limite, ce qui *contredit* la caractérisation séquentielle de la continuité de f au point c. ▲

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.
Montrez que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.